

## Persamaan Tunak dan Tidak Tunak 1-D Panas dengan Metode Volume Hingga

Rajib Sainan Zulkifli<sup>1</sup>, Putu Harry Gunawan<sup>2</sup>

<sup>1,2,3</sup> Fakultas Informatika, Universitas Telkom, Bandung

<sup>1</sup>rajibzulkifli@students.telkomuniversity.ac.id, <sup>2</sup>phgunawan@telkomuniversity.ac.id,

---

### Abstrak

Pada jurnal ini, penulis memberikan perbedaan persamaan difusi 1-D dengan metode volume hingga (finite volume method) dari kondisi tunak (steady) dan tidak tunak. Kondisi tunak menghasilkan grafik linier. Sedangkan untuk grafik dari kondisi tidak tunak menghasilkan grafik yang dipengaruhi oleh waktu terhadap persamaan difusi dengan sebelumnya memiliki kondisi awal. Nilai temperatur suhu dari grafik tunak dapat diketahui antara titik kedua ujungnya pada sebuah pipa berisi dengan suhu masing-masing 100°C dan 500°C. Dengan begitu, dapat diketahui besaran suhu disetiap titik pada pipa berisi tersebut. Sedangkan untuk nilai temperatur suhu dengan kondisi tidak tunak menghasilkan grafik penurunan suhu yang dipengaruhi oleh waktu. Semakin lama waktu berjalan, maka grafik akan mendekati nilai 0°C. Kondisi awal untuk tidak tunak memiliki nilai suhu 0°C pada kedua ujungnya, dan titik tengah panjang pipa berisi memiliki suhu sebesar 1°C. Setelah proses difusi untuk kondisi tidak tunak dijalankan, maka hasil yang didapatkan berupa penurunan grafik dengan besaran suhu pada titik tengah sebesar  $0,6694 \times 10^{-26}$  °C dan pada titik terujung masih bersuhu 0°C. Kemudian untuk kondisi tidak tunak akan dibandingkan dengan metode beda hingga (finite different method) dan hasil perbandingannya menghasilkan grafik yang sama, dengan menggunakan rumus yang berbeda sesuai dengan metodenya. Jurnal ini sangat bermanfaat pada kasus yang memiliki tingkat kompleksitas yang tinggi, sehingga persamaan difusi 1-D yang terdapat pada jurnal ini diharapkan dapat membantu atau menjadi sumber acuan untuk penelitian berikutnya yang berhubungan dengan proses difusi pada metode beda hingga.

Kata kunci : Volume Hingga, Difusi, Tunak, Tidak Tunak.

---

### Abstract

In this journal, the authors provide differences in the 1-D diffusion equation with the finite volume method until the steady and unsteady. Steady conditions produce linear graphs. Whereas for graphs from unsteady conditions produce graphs that are influenced by time on diffusion equations with previously having initial conditions. Rated temperature from unsteady graphs can be found between the two ends of a filled pipe with temperatures 100° and 500°. That way, it can be known the temperature amount in each point on the pipe containing it. Whereas for temperature temperature values with unsteady conditions produce a graph of temperature decrease which is influenced by time. The longer the time runs, the graph will approach the value of 0°. The initial conditions for unsteady have a temperature value of 0° at both ends, and the midpoint of the pipe length has a temperature of 1°. After the diffusion process for unsteady conditions is carried out, the results obtained are in the form of decreasing the graph with the temperature at the midpoint of  $0,6694 \times 10^{-26}$  °C and at the end point is still at 0°. Then for unsteady conditions it will be compared with the finite difference method and the comparison results produce the same graph, using different formulas according to the method. This journal is very useful in cases that have a high level of complexity, so that the 1-D diffusion equation found in this journal is expected to help or become a reference source for subsequent research related to the diffusion process in the finite difference method.

Keywords: Finite Volume, Diffusion, Steady, Unsteady.

---

## 1. Pendahuluan

Pada penelitian ini, penulis menggunakan metode volume hingga (finite volume) untuk meneliti proses difusi pada perpindahan panas dengan kondisi 1 Dimensi. Setiap metode finite different, finite volume, dan finite element memiliki kondisi yang berkaitan dengan waktu dan tidak berkaitan dengan waktu. Kondisi yang berkaitan dengan waktu dapat disebut dengan kondisi unsteady atau tidak tunak dan kondisi yang tidak berkaitan dengan waktu dapat disebut sebagai kondisi steady atau tunak.

## Latar Belakang

Persamaan Finite Volume Method [1] merupakan sebuah metode diskritisasi yang cocok untuk simulasi numerik berbagai jenis seperti eliptik, parabola atau hiperbolik. Telah banyak digunakan pada beberapa bidang teknik, seperti mekanika fluida, transfer panas, atau persamaan transfer. Beberapa variabel penting yang terdapat di Finite Volume Method hampir serupa dengan Finite Different sehingga dapat digunakan pada geometri acak, menggunakan jerat terstruktur ataupun tidak terstruktur. Finite Volume Method sendiri mempunyai sifat "keseimbangan". Dimana sifat keseimbangan tersebut terdapat pada setiap variabel yang diskritisasi dan sering disebut dengan volume kontrol oleh rumus divergensi dan sebuah formulasi integral dari fluks di atas batas yang di peroleh dari volume kontrol. Sehingga variabel fluks merupakan variabel yang akan dicari dalam jurnal ini.

Pada setiap persamaan matematika yang akan dimodelkan menghasilkan sebuah solusi dan sebuah grafik. Hasil grafik yang diperoleh dapat berupa grafik steady dan unsteady. Hal itu dikarenakan kondisi awal dari persamaan matematika yang saling berkaitan. Pada metode volume beda hingga atau finite volume method, setiap persamaan seperti persamaan difusi, persamaan menghitung aliran fluida dan perpindahan panas, dan sejenisnya. Persamaan difusi memiliki solusi dalam satu dimensi, dua dimensi, hingga tiga dimensi. Tifa-tiap dimensi memiliki hasil solusi grafik dengan kondisi steady dan unsteady. Hal yang mempengaruhi hasil grafik dari kondisi tersebut dikarenakan dari variabel waktu yang mempengaruhi persamaan difusi. Difusi merupakan sebuah proses osmosis dan persamaan transport [7] dimana terdapat variabel fluks untuk menemukan solusi difusi sehingga proses difusi bisa terjadi.

Secara umum, difusi merupakan peristiwa mengalirnya/berpindahannya suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah. Perbedaan konsentrasi yang ada pada dua larutan disebut gradien konsentrasi. Difusi akan terus terjadi hingga seluruh partikel tersebar luas secara merata atau mencapai keadaan kesetimbangan di mana perpindahan molekul tetap terjadi walaupun tidak ada perbedaan konsentrasi. Pada metode volume beda hingga (finite volume method), persamaan difusi merupakan penurunan rumus dari persamaan transfer [6]. Kemudian dilakukan penurunan rumus dan mendiskritkan rumus hingga menjadi kondisi steady. Kondisi steady bisa menjadi nilai awal untuk kondisi unsteady. Hal itu dikarenakan kondisi steady tidak mempunyai variabel waktu untuk proses perubahan nilai kondisi awal dan umumnya kondisi steady menghasilkan grafik garis lurus.

Topik yang dipilih oleh penulis, ialah topik untuk menghitung suhu pada suatu media 1 dimensi dengan kondisi tunak (steady) dan tidak tunak (unsteady). Hasil yang akan diperoleh yaitu berupa grafik. Dimana grafik yang dihasilkan akan berbeda antara kondisi tunak dan tidak tunak. Dari proses difusi, akan mengetahui bagaimana proses difusi itu terjadi dan persamaan matematika apa saja yang akan berlaku, termasuk variabel yang mempengaruhinya.

Metode volume hingga dipilih karena untuk mengetahui kondisi proses difusi yang terjadi pada bidang satu dimensi. Mengapa metode beda hingga (finite different) tidak dipilih, karena metode beda hingga tidak bisa pada kasus yang mempunyai luas atau volume dalam proses perhitungan difusi yang terjadi, metode beda hingga pada umumnya untuk [3] memperkirakan solusi persamaan diferensial. Arti diferensial adalah untuk menemukan fungsi atau beberapa pendekatan diskrit pada fungsi yang memenuhi hubungan tertentu antara berbagai turunannya pada beberapa wilayah ruang dan atau waktu tertentu, bersamaan dengan batasan kondisi di sepanjang tepi domain.

## Topik dan Batasannya

Topik yang akan dibahas pada jurnal ini adalah untuk mengetahui perbedaan kondisi tunak dan tidak tunak pada persamaan difusi satu dimensi dengan metode beda volume.

Batasan yang diterapkan oleh penulis yaitu hanya menggunakan persamaan satu dimensi. Dengan kondisi awal untuk tidak tunak adalah persamaan sin. Sedangkan untuk kondisi tunak menggunakan persamaan linear.

## Tujuan

Tujuan dari jurnal ini adalah untuk memperlihatkan perbedaan kondisi tunak dan tidak tunak pada persamaan difusi satu dimensi yang dapat dipakai dalam pemecahan solusi jika terdapat variabel waktu yang mempengaruhinya.

## Organisasi Tulisan

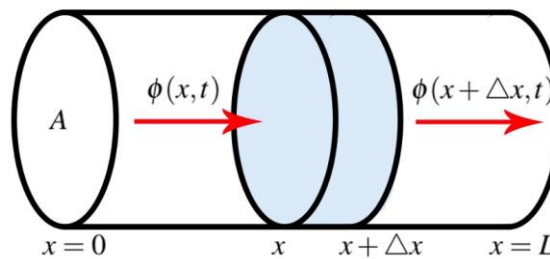
Pada bab 2, studi terkait yang dibahas meliputi penurunan rumus dari persamaan transfer panas hingga membentuk persamaan difusi. Setelah membentuk persamaan difusi, persamaan akan dibedakan menjadi dua bagian, yaitu untuk kondisi tunak dan tidak tunak. Kedua kondisi tersebut mempunyai hasil grafik yang berbeda, dikarenakan kondisi tidak tunak dipengaruhi oleh waktu. Pada bab 3, sistem yang dibangun meliputi pembuatan flowchart, algoritma untuk metode difusi satu dimensi dalam kondisi tunak dan tidak tunak. Serta pada bab 4, menampilkan porses dari algoritma yang telah dirancang, sehingga dapat ditarik analisis dan kesimpulan.

## 2. Studi Terkait

### 2.1 Persamaan Panas

Pada proses difusi terdapat persamaan panas. Persamaan panas merupakan aliran panas yang menggambarkan transfer energi panas [2]. Pada proses transfer panas terjadi dua proses dasar yang terjadi secara bersamaan, yaitu proses konduksi dan konveksi. Konduksi merupakan penjalaran kalor tanpa disertai perpindahan bagian-bagian zat perantaranya. Penjalaran ini biasanya terjadi pada benda padat. Kalor mengalir pada konduktor dari sisi yang bersuhu tinggi ke sisi yang bersuhu rendah dan konveksi merupakan perpindahan panas dari satu tempat ke tempat lain karena adanya perpindahan fluida, proses perpindahan panas melalui perpindahan massa. Hasil konduksi dari tumbukan molekul tetangga di mana energi kinetik dari getaran satu molekul ditransfer ke titik tetangga terdekat. Energi termal tersebut dapat menyebar melalui konduksi bahkan jika molekul tidak bergerak dari lokasinya. Selain itu, jika molekul bergetar dan berjalan dari satu daerah menuju daerah lainnya, maka akan dibutuhkan energi panas yang bersamaan dengan molekulnya. Jenis pergerakan ini dapat disebut dengan konveksi. Dari kedua proses konduksi dan konveksi maka proses difusi akan berjalan.

Densitas (kepadatan) energi termal adalah jumlah energi panas per satuan volume. Densitas energi termal dapat dilambangkan dengan  $e(x,t)$ . Letak densitas energi termal pada proses perpindahan panas dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Batang (pipa) 1-D dengan energi panas yang mengalir masuk dan keluar dari irisan penampang tipis.

Pada Gambar 1 terdapat variabel  $\phi(x,t)$  merupakan fluks panas dan A, dimana variabel A merupakan luas penampang dan jarak antar x dan  $x + \Delta x$  merupakan lebar sebuah penampang. Perpindahan energi panas pada Gambar 1 terjadi pada sebuah tabung berbentuk pipa dimana pada jarak x terdapat penampang dengan ketebalan sebesar  $(x + \Delta x) - x$  dan panjang pipa sebesar L. Energi panas yang masuk sebelum penampang dapat diarahkan sesuai dengan variabel  $\phi(x,t)$  dan energi panas yang keluar dari penampang dapat diarahkan sesuai dengan variabel  $\phi(x + \Delta x, t)$  yang telah digambarkan pada Gambar 1.

Jika densitas energi termal konstan sepanjang volume pipa, maka total energi panas yang terdapat pada penampang adalah merupakan variabel dari densitas energi termal itu sendiri. Secara umum, densitas energi termal tidak konstan, akan tetapi jika  $\Delta x$  mempunyai nilai yang sangat kecil, maka  $e(x,t)$  dapat diperkirakan sebagai konstan diseluruh volume pipa sehingga

$$\text{heat energy} = e(x,t)A \Delta x \tag{1}$$

dimana  $A \Delta x$  dapat disebut sebagai volume.

Energi panas yang terjadi diantara x dan  $x + \Delta x$  seperti pada Gambar 1, dapat berubah dalam waktu yang disebabkan aliran energi panas yang mengalir pada tepi (x dan  $x + \Delta x$ ) dan energi panas yang dihasilkan dari dalam penampang (dikarenakan sumber energi panas positif dan negatif). Tidak ada perubahan energi panas yang terjadi pada permukaan. Proses aliran energi panas ini dapat dibuat dalam kata-kata persamaan dengan

Laju perubahan energi panas tepat waktu	=	energi panas yang mengalir melintasi batas per satuan waktu	+	energi panas yang dihasilkan di dalam per satuan waktu
---	---	---	---	--

Proses tersebut dapat disebut sebagai konservasi energi panas. Untuk penampang, laju perubahan energi panas adalah

$$\frac{\partial}{\partial t} [e(x,t)A \Delta x], \tag{2}$$

di mana variabel parsial  $\partial / \partial t$  digunakan karena variabel  $x$  diasumsikan tetap.

Energi termal yang mengalir ke kanan atau ke kiri dalam pipa satu dimensi dapat disebut sebagai fluks panas. Atau dengan kata lain, fluks panas merupakan jumlah energi termal per unit waktu yang mengalir ke kanan per satuan luas permukaan.

Jika  $\varphi(x, t) < 0$ , maka dapat diartikan bahwa energi panas mengalir ke arah kiri. Energi panas yang mengalir per satuan waktu melewati batas penampang adalah  $\varphi(x, t)A - \varphi(x + \Delta x, t)A$ , dimana fluks panas merupakan aliran per satuan luas permukaan dan harus dikalikan dengan luas permukaan. Jika  $\varphi(x, t) > 0$  dan  $\varphi(x + \Delta x) > 0$  seperti yang diilustrasikan pada Gambar 1, maka energi panas yang mengalir per satuan waktu pada  $x$  berkontribusi terhadap peningkatan energi panas dalam penampang sedangkan aliran energi panas pada  $(x + \Delta x)$  mengalami penurunan energi panas.

Energi panas dapat dipengaruhi oleh sumber internal termal energi, sehingga dapat divariabelkan seperti  $S(x, t)$ . Dimana  $S(x, t)$  merupakan energi panas per satuan volume yang dihasilkan per satuan waktu yang disebabkan reaksi kimia atau pemanasan listrik. Nilai  $S(x, t)$  diperkirakan sama dalam ruang untuk penampang tipis, dengan demikian total energi panas yang dihasilkan per satuan waktu dalam penampang tipis kira-kira sebesar  $S(x, t)A \Delta x$ .

Konservasi energi panas pada penampang tipis yaitu tingkat perubahan energi panas yang disebabkan oleh adanya energi panas yang mengalir melintasi batas dan sumber internal, sehingga dapat ditulis dalam rumus

$$\frac{\partial}{\partial t}[e(x, t)A \Delta x] \approx \varphi(x, t)A - \varphi(x + \Delta x, t)A + S(x, t)A \Delta x \quad (3)$$

Dimana pada persamaan (3) dapat tidak tepat karena terdapat berbagai jumlah yang diasumsikan konstan untuk potongan cross-sectional kecil. Persamaan (3) dapat diklaim bahwa hasil dapat akurat jika  $\Delta x \rightarrow 0$ . Limit dari  $\Delta x \rightarrow 0$ , persamaan (3) tidak menghasilkan nilai yang bagus, yaitu bernilai  $0 = 0$ . Namun jika persamaan dibagi oleh  $\Delta x$  dan mengambil batas dari limit  $\Delta x \rightarrow 0$  sehingga rumus berubah menjadi

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, t) - \varphi(x + \Delta x, t)}{\Delta x} + S(x, t) \quad (4)$$

dimana nilai konstan cross-sectional dapat dihapus, sehingga persamaan (4) dapat mengganti persamaan (3). Dalam proses limit dari persamaan (4) dapat dianggap bernilai tetap sehingga persamaan dapat diturunkan dalam turunan parsial menjadi

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + S \quad (5)$$

Energi panas yang terdapat pada penampang tipis adalah  $e(x, t)A \Delta x$ , atau dapat disebut dengan energi termal. Energi termal merupakan energi yang dibutuhkan untuk menaikkan suhu dari suhu awal  $0^\circ \text{C}$  ke suhu aktualnya  $u(x, t)$ . Karena panas spesifik tidak bergantung pada suhu, maka energi panas per satuan massa hanya  $c(x)u(x, t)$  dengan  $c$  merupakan spesifik panas dimana energi panas yang harus dipasok ke satuan massa suatu zat untuk menaikkan suhunya pada satuan unit tertentu. Dengan demikian maka diperlukannya densitas massa atau kerapatan massa per satuan volume ( $\rho$ ). Hal ini memungkinkan untuk bervariasi dengan variabel  $x$  yang disebabkan pipa yang berbahan tidak serupa. Total energi panas dalam setiap penampang tipis dapat diperoleh dari  $c(x)u(x, t) \cdot \rho A \Delta x$  sehingga

$$e(x, t)A \Delta x = c(x)u(x, t) \cdot \rho A \Delta x \quad (6)$$

Dalam persamaan (6) dapat diketahui hubungan dasar antara energi panas dan suhu yaitu

$$e(x, t) = c(x)\rho u(x, t) \quad (7)$$

Hal ini menyatakan bahwa energi termal per satuan volume sama dengan energi panas per satuan massa per satuan derajat dikali dengan temperatur pada densitas massa dengan massa per satuan volume. Ketika kepadatan energi termal dihilangkan menggunakan persamaan (7) sehingga konservasi energi termal pada persamaan (5) dapat menjadi

$$c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + S \quad (8)$$

Persamaan (8) dapat dianggap sebagai satu persamaan dengan dua variabel yang tidak diketahui yaitu suhu  $u(x, t)$  dan fluks panas (aliran energi panas per satuan luas permukaan)  $\varphi(x, t)$ . Sehingga aliran energi panas pada suhu saling bergantung dengan sifat kualitatif tertentu dari aliran panas. Sifat kualitatif dari aliran panas yaitu:

1. Jika suhu konstan di suatu daerah, tidak ada aliran energi panas.
2. Jika ada perbedaan suhu, energi panas mengalir dari daerah yang lebih panas ke daerah yang lebih dingin.
3. Semakin besar perbedaan suhu (untuk material yang sama), semakin besar pula aliran energi panas.

4. aliran energi panas akan bervariasi untuk bela diri yang berbeda, bahkan dengan perbedaan suhu yang sama.

Dari keempat sifat kualitatif tersebut, Fourier (1768-1830) merumuskannya dalam bentuk

$$\phi = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (9)$$

Dimana persamaan (9) dapat dikenal sebagai hukum konduksi panas Fourier. Variabel  $\partial u / \partial x$  pada persamaan (9) merupakan turunan dari suhu yang merupakan kemiringan suhu sebagai fungsi  $x$  untuk  $t$  yang tetap. Dan dapat mewakili perbedaan suhu (per satuan panjang). Persamaan (9) menyatakan bahwa panas flux sebanding dengan perbedaan suhu (per satuan panjang) jika suhu  $u$  meningkat sebagai kenaikan (seperti suhu lebih panas ke arah kanan) maka energi panas fluks berjalan ke arah kiri, sehingga terdapat tanda minus pada persamaan (9).  $K_0$  merupakan koefisien proporsionalita atau dapat disebut sebagai konduktivitas termal.

Jika hukum Fourier pada persamaan (9) diganti dalam konservasi persamaan energi panas yaitu persamaan (8), maka hasil persamaan diferensial parsial menjadi

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (K_0 \frac{\partial u}{\partial x}) + S \quad (10)$$

Dimana persamaan (10) merupakan persamaan panas yang dapat dibawa pada proses difusi. Jika dalam kondisi tertentu tidak terdapat nilai sumber atau variabel  $S$ , maka  $S = 0$ , sehingga rumus dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (11)$$

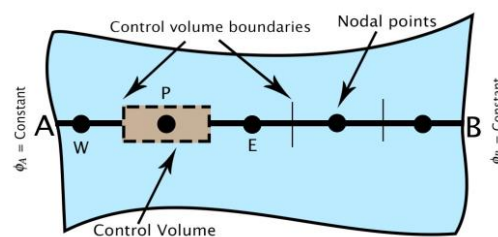
dengan konstan  $\Gamma$  adalah  $K_0/c\rho$ .

## 2.2 Metode Finite Volume untuk satu dimensi dalam kondisi tunak (steady)

Dari persamaan (10) dimana merupakan persamaan panas yang kemudian dapat dibawa ke persamaan tunak (steady) dengan variabel  $\partial u / \partial t$  dinolkan sehingga rumus menjadi rumus menjadi,

$$\frac{d}{dx} (\Gamma \frac{d\phi}{dx}) + S = 0 \quad (12)$$

Untuk menghampiri solusi nilai dari persamaan (10), maka dibutuhkan proses difusi menggunakan metode volume hingga (finite volume) dengan kondisi yang dapat digambarkan pada Gambar 2 dengan domain satu dimensi.

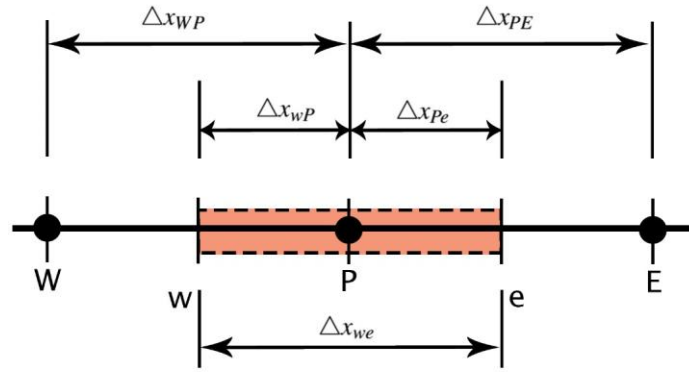


Gambar 2. Domain satu dimensi

Dengan A dan B merupakan titik yang memiliki nilai suhu sedangkan titik diantar A sampai B merupakan titik (nodal pada gambar) yang akan dicari nilai suhunya. Untuk di titik P memiliki daerah yang diarsir warna abu-abu yang merupakan wilayah control volume. Dimana wilayah control volume merupakan wilayah yang dicari nilainya dengan melibatkan titik ketetanggannya (titik W (barat) dan E (timur)). Untuk proses perhitungan di wilayah control volume dapat menggunakan persamaan (11) dengan membuat terlebih dahulu kisi-kisi domain dan proses diskrit untuk setiap titik-titik.

Langkah pertama : membuat kisi-kisi domain

Langkah pertama dalam metode finite volume adalah membagi domain menjadi volume kontrol yang didiskritkan. Kemudian menempatkan sejumlah titik-titik di ruang antara A dan B. Batas volume kontrol ditempatkan di tengah-tengah antara simpul yang berdekatan. Jadi setiap titik dikelilingi oleh volume kontrol. Hal ini merupakan untuk mengatur volume kontrol dekat dengan tepi domain sedemikian rupa sehingga batas-batas fisik bertepatan dengan batas-batas volume kontrol. Dapat digambarkan seperti pada Gambar 3.



Gambar 3. Konvensi metode CFD

Titik tengah divariabelkan oleh P dan tetangganya dalam geometri satu dimensi, dengan titik mengarah simpul ke barat dan timur yang kemudian divariabelkan masing-masing oleh W dan E. Sisi barat dari volume kontrol disebut w dan sisi timur disebut e. Jarak antara titik W dan P serta antara titik P dan E masing-masing diberi masing-masing variabel  $\partial x_{WP}$  dan  $\partial x_{PE}$ . Demikian pula jarak dari titik w dan P serta titik P dan e dilambangkan masing-masing dengan  $\partial x_{wP}$  dan  $\partial x_{Pe}$ . Pada gambar 3 menunjukkan bahwa lebar volume kontrol adalah  $4x = \partial x_{we}$ .

Langkah kedua : proses diskrit

Langkah kunci utama dari metode volume hingga adalah integrasi dari persamaan pengatur di atas volume kontrol untuk menghasilkan persamaan terdiskritisasi pada titik P. Untuk volume kontrol yang di definisikan diberikan rumus

$$\int_{w}^e \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + S dV = \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} V = 0 \quad (13)$$

Variabel A adalah luas penampang dari volume kontrol.  $4V$  merupakan volume dan S adalah nilai rata-rata sumber S atas volume kontrol. Persamaan (13) menyatakan bahwa fluks difusi dari  $\phi$  meninggalkan dari sisi timur dikurangi fluks difusi dari  $\phi$  memasuki sisi barat sama dengan pembangkit  $\phi$ , yaitu merupakan persamaan keseimbangan untuk  $\phi$  di atas volume kontrol. Untuk memperoleh bentuk-bentuk yang berguna dari persamaan diskrit, koefisien difusi antar titik  $\Gamma$  dan gradien  $d\phi/dx$  di titik timur (e) dan barat (w) sangat diperlukan.

Untuk memperoleh bentuk persamaan diskrit yang sempurna, maka diperlukannya koefisien difusi antarmuka  $\Gamma$  dan gradien  $d\phi/dx$  pada sisi timur e dan sisi barat w. Nilai-nilai dari variabel  $\phi$  dan koefisien difusi akan didefinisikan dan ditaksir pada titik-titik nodal. Untuk menghitung gradien pada volume kontrol terdistribusi dapat diperkirakan nilainya antara titik-titik nodal yang digunakan. Pendekatan linier menjadikan cara yang paling sederhana untuk menghitung nilai antar muka dan gradien. Cara ini dapat disebut sebagai diferensial tengah. Dalam sebuah garis yang sama, nilai interpolasi linear untuk  $\Gamma_w$  dan  $\Gamma_e$  dapat diperoleh dari rumus

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_w + \Gamma_P}{2} \quad (14)$$

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_e}{2} \quad (15)$$

Dan difusi flux dapat dimasukkan kedalam rumus seperti

$$\left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \Gamma_e A_e \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\partial x_{PE}} \right) \quad (16)$$

$$\left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w = \Gamma_w A_w \left( \frac{\phi_P - \phi_W}{\partial x_{WP}} \right) \quad (17)$$

Dalam situasi persamaan sederhana, variabel sumber S merupakan fungsi dari variabel yang bergantung. Sehingga dalam kasus seperti itu, metode volume beda hingga dapat mendekati variabel sumber dengan menggunakan persamaan linear:

$$\bar{S} 4V = S_u + S_p \phi_P \quad (18)$$

Selanjutnya, persamaan 16, 17, dan 18 disubsitusikan kedalam persamaan (13) dengan sebagai berikut

$$\Gamma_e A_e \left( \frac{\partial \phi_E}{\partial x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left( \frac{\partial \phi_P}{\partial x_{WP}} \right) + (S_u + S_p \phi_P) = 0 \tag{19}$$

Rumus (19) dapat disusun kembali menjadi

$$\left( \frac{\Gamma_e}{\partial x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\partial x_{WP}} A_w - S_p \right) \phi_P = \left( \frac{\Gamma_w}{\partial x_{WP}} A_w \right) \phi_W + \left( \frac{\Gamma_e}{\partial x_{PE}} A_e \right) \phi_E + S_u \tag{20}$$

Identifikasi untuk koefisien  $\phi_W$  dan  $\phi_E$  pada persamaan (20) dapat sebagai variabel  $a_W$  dan  $a_E$ , serta pada koefisien  $\phi_P$  dapat sebagai variabel  $a_P$ , dimana pada persamaan (20) dapat ditulis sebagai

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u \tag{21}$$

dimana variabel  $a_W$ ,  $a_E$ , dan  $a_P$  dijelaskan pada tabel 1

$a_W$	$a_E$	$a_P$
$\frac{\Gamma_w}{\partial x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\partial x_{PE}} A_e$	$a_W + a_E - S_p$

Tabel 1. Tabel rumus persamaan 21

Nilai untuk variabel  $S_u$  dan  $S_p$  dapat diperoleh dari rumus persamaan (18):  $\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_P$ .

### 2.3 Metode Finite Volume untuk satu dimensi dalam kondisi tidak tunak (unsteady)

Untuk persamaan difusi pada kondisi unsteady yang dipengaruhi oleh waktu yaitu  $\partial T / \partial t$ , sehingga dari bentuk persamaan difusi kondisi tunak pada persamaan (13) terdapat penambahan variabel waktu sehingga persamaan dibentuk menjadi

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV + \int_{\Delta V} S dV = 0 \tag{22}$$

Dari persamaan (22), variabel  $\Gamma$  merupakan koefisien sehingga dapat dikeluarkan dari integral dan semua ruas kiri dipindahkan ke sebelah kanan sehingga persamaan didapati dengan bentuk

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV - \frac{\partial T}{\partial t} - \int_{\Delta V} S dV = 0 \tag{23}$$

Kemudian persamaan (23) diubah dalam bentuk diskrit sehingga menjadi

$$\Gamma \left[ \left( A \frac{dT^{n+1}}{dx} \right)_e - \left( A \frac{dT^{n+1}}{dx} \right)_w \right] / \Delta x_{ew} - \left( \frac{P - \bar{P}}{\Delta t} \right) - \bar{S} \Delta V = 0 \tag{24}$$

Nilai  $T^n$  telah diketahui sebagai nilai dari kondisi awal yang telah ditetapkan, dan nilai  $T^{n+1}$  merupakan nilai yang dicari setelah waktu berjalan. Dari persamaan (24) dapat dibentuk seperti pada persamaan (19)

$$\left( A_e \Gamma \frac{E - \bar{P}}{\Delta x_{PE} \Delta x_{ew}} \right) - \left( A_w \Gamma \frac{P - \bar{W}}{\Delta x_{WP} \Delta x_{ew}} \right) - \left( \frac{P - \bar{P}}{\Delta t} \right) - \bar{S} \Delta V = 0 \tag{25}$$

Persamaan (25) dapat disusun kembali menjadi

$$\left( \frac{A_e \Gamma \Delta t}{\Delta x_{PE} \Delta x_{ew}} \right) T_E^{n+1} - \left( \frac{A_e \Gamma \Delta t}{\Delta x_{PE} \Delta x_{ew}} \right) T_P^{n+1} - \left( \frac{A_w \Gamma \Delta t}{\Delta x_{WP} \Delta x_{ew}} \right) T_P^{n+1} + \left( \frac{A_w \Gamma \Delta t}{\Delta x_{WP} \Delta x_{ew}} \right) T_W^{n+1} - T_P^{n+1} - \frac{\bar{S} \Delta V}{\Delta t} = 0 \tag{26}$$

persamaan (26) yang telah dibentuk seperti pada persamaan (20) dengan mengelompokkan suku  $T_P^{n+1}$ ,  $T_W^{n+1}$ , dan  $T_E^{n+1}$  sehingga rumus menjadi

$$\left( \frac{A_e \Gamma \Delta t}{\Delta x_{PE} \Delta x_{ew}} + \frac{A_w \Gamma \Delta t}{\Delta x_{WP} \Delta x_{ew}} + 1 + S_p \right) T_P^{n+1} = \left( \frac{A_e \Gamma \Delta t}{\Delta x_{PE} \Delta x_{ew}} \right) T_E^{n+1} + \left( \frac{A_w \Gamma \Delta t}{\Delta x_{WP} \Delta x_{ew}} \right) T_W^{n+1} + T_P^n - S_u \tag{27}$$

Dari persamaan (27) akan dibuat dalam persamaan sederhana dengan persamaan seperti

$$a_p T_p^{n+1} - a_w T_w^{n+1} - a_E T_E^{n+1} = S_u \tag{28}$$

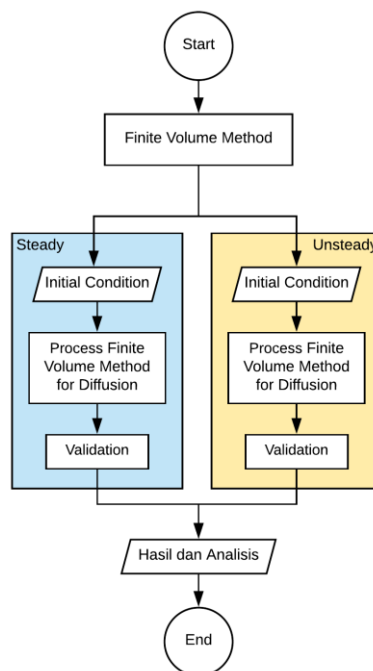
variabel  $a_p, a_w,$  dan  $a_e$  dijelaskan pada Tabel 2.

$a_w$	$a_E$	$a_p$	$S_u$
$\frac{A_w \Gamma \Delta t}{\Delta x_w \rho \Delta x_{ew}}$	$\frac{A_E \Gamma \Delta t}{\Delta x_{pE} \Delta x_{ew}}$	$1 + a_w + a_E - S_p$	$T_p^n$

Tabel 2. Tabel rumus persamaan 27

### 3. Sistem yang Dibangun

#### 3.1 Flowchart Sistem Tugas Akhir



Gambar 4. Flowchart Sistem Tugas Akhir

Pada Gambar 4, terdapat dua proses untuk kondisi steady dan unsteady. Kedua kondisi tersebut mempunyai perbedaan variabel, dimana kondisi tidak tunak (unsteady) dipengaruhi oleh waktu, sedangkan kondisi tunak (steady) tidak. Setelah melewati proses perhitungan persamaan difusi pada kondisi tunak dan tidak tunak, maka hasil yang ditampilkan berupa grafik.

Untuk proses persamaan difusi kondisi tunak dan tidak tunak telah dijelaskan pada Subab 2.4 yaitu penjelasan cara perhitungan untuk mendapatkan solusinya pada setiap titik di domain yang telah ditentukan. Dengan demikian, dari persamaan diskrit yang telah dibentuk kedalam bentuk  $a_p T_p = a_w T_w + a_E T_E$  pada setiap titik, persamaan tersebut dapat dimasukkan kedalam algoritma sehingga untuk kondisi yang mempunyai jumlah titik banyak, dapat dengan mudah untuk mencari solusi nilai pada setiap titiknya berikut dengan grafik yang didapati dari nilai- nilai solusi.

Algoritma dapat dilihat pada Subab 3.2 dan pada lampiran untuk algoritma pada aplikasi Matlab.



### 3.2 Algoritma kondisi tunak

---

#### Algorithm 1 Algoritma FVDM satu dimensi steady.

---

```

1: Start
2: TA, TB, k, N, aW, aE, sP, Su, Ap: integer . Declaration
3: A, L, dx : real
4: T, s : array of integer
5: dx=L/N
6:
7: Initialize T . initialize T (temperature) matrix
8: Initialize s . initialize s (source) matrix
9: For i = 1 : N do . Solve formula every node
10:   If i = 1 : N do
11:     aW = 0 . Node 1 boundary
12:     aE = (k * A)/dx
13:     sP = (-2 * k * A)/dx
14:     Su = ((2 * k * A)/dx) * TA
15:     aP = aW + aE - sP;
16:
17:     T(i, i) = aP; T(i, i + 1) = -aE . Populate temperature array
18:
19:     s(i) = Su . Populate source array
20:   ElseIf i > 1 and i < N do
21:     aW = (k/dx) * A . Node 1 <= i <= n mid slab
22:     aE = (k/dx) * A
23:     aP = aW + aE
24:
25:     T(i, i - 1) = -aW; T(i, i) = aP; T(i, i + 1) = -aE . Populate temperature array
26:
27:     s(i) = 0 . Populate source array
28:   ElseIf i = N do
29:     aW = (k * A)/dx . Node n boundary
30:     aE = 0
31:     sP = -((-2 * k * A)/dx)
32:     Su = ((2 * k * A)/dx) * TB
33:     aP = aW + aE - sP
34:
35:     T(i, i - 1) = -aW; T(i, i) = aP . Populate temperature array
36:
37:     s(i) = Su . Populate source array
38:   EndIf
39: EndFor
40:
41: Solve matrix T x = S
42: output solve matrix T x = S
43: End

```

---

Pada algoritma tunak, langkah awal adalah membuat deklarasi variabel pada kamus global dengan penamaan variabel TA, TB, k, n, aW, aE, sP, Su dan Ap dalam bentuk tipe data integer. Dengan variabel TA dan TB berturut-turut adalah nilai titik A dan B pada Gambar 2, variabel k merupakan nilai  $\Gamma$  pada persamaan (20) dengan  $\Gamma_e$  dan  $\Gamma_w$  bernilai sama. Variabel n merupakan jumlah titik yang terdapat pada domain dan untuk variabel aW, aE, sP, Su dan Ap merupakan nilai yang diperoleh dari hasil perhitungan dengan rumus seperti pada Tabel 1. Selain itu, terdapat variabel A, L, dan dx dalam bentuk tipe data real dimana A merupakan luas penampang dari volume kontrol, L merupakan panjang penampang domain dan dx merupakan jarak tiap titik-titik pada domain. Serta variabel T dan s dalam bentuk tipe data array of integer dimana tipe data tersebut merupakan untuk menyimpan nilai dalam bentuk matrix untuk T merupakan matrix nilai bervariasi suhu dan s adalah solusi persamaan.

Kemudian menginisiasi matrix dalam bentuk array untuk variabel temperatur dan hasil agar program dapat mengenali variabel dan mengaksesnya.

Selanjutnya dilakukan pengulangan untuk memperoleh nilai setiap titiknya dari titik awal hingga titik akhir dengan dilanjut pengecekan posisi titik. Pengecekan posisi titik diperlukan karena untuk mencari nilai pada titik awal dan akhir berbeda rumus dengan mencari nilai pada titik antara awal dan akhir.

Jika titik yang sedang diproses merupakan titik awal maka masuk kedalam rumus untuk mencari titik pada posisi awal. Di rumus tersebut terdapat variabel  $aW$ ,  $aE$ ,  $Sp$ ,  $Su$ , dan  $aP$ , dimana variabel tersebut mengacu pada persamaan (21). Setelah didapati lalu nilai dari  $aP$  dimasukkan pada array  $T(i,i)$  dengan  $i$  merupakan titik (1,1). Untuk variabel  $aE$  dimasukkan pada array  $T(i,i+1)$  dengan  $i$  merupakan titik (1,2). Karena titik ini merupakan titik awal, maka nilai dari  $aW$  adalah 0. Hal ini sudah dijelaskan pada subbab studi kasus. Nilai dari variabel  $Su$  dapat dimasukkan kedalam array  $s(i)$  dengan  $i$  merupakan titik (1).

Untuk titik selanjutnya, proses hampir sama dengan titik awal, akan tetapi hanya pada titik antara titik awal dan titik akhir tidak ada variabel  $Su$  dan untuk titik akhir variabel  $aE$  yang bernilai 0.

Setelah didapati nilai pada setiap titiknya, untuk memecahkan solusinya diperlukan metode eliminasi Gaussian Jordan atau untuk mencari nilai  $x$  pada  $Tx = S$  di algoritma kondisi tunak, sehingga dapat diperoleh nilai solusi dari setiap titik - titiknya yang kemudian dapat dibuat kedalam bentuk grafik.

### 3.3 Algoritma kondisi tidak tunak

---

Algorithm 2 Algoritma FVDM satu dimensi unsteady.

---

```

1: Start
2: TA, TB, k, N, Time, Tfinal, aW, aE, sP, Su, Ap : integer . Declaration
3: A, L, dx, dt, pi, x : real
4: T, s : array of integer
5: dx=L/(N-1)
6: Initialize T . initialize T (temperature) matrix
7: Initialize T1 . initialize T (temperature) matrix
8: Initialize s . initialize s (source) matrix
9:
10: x = 0 : dx : L . Initial conditions
11:
12: For i = 2 : N - 1 do . Initial conditions T matrix
13:   T(i) = sin(pi * 2 * (dx * (i - 1)))
14:   EndIf
15: Output plot (x,T) . Plot graph
16: While Time < T final do
17:   For i = 2 : N - 1 do . Solve formula every node
18:     If i = 2 : N - 1 do
19:       aW = 0 . Node 1 boundary
20:       aE = (k * dt)/(dx * dx)
21:       Su = T(i)
22:       aP = aE + aW + 1
23:
24:       T1(i, i) = aP; T(i, i + 1) = -aE . Populate temperature array
25:
26:       s(i) = Su . Populate source array
27:       ElseIf i > 2 and i < N - 1 do
28:         aW = (k * dt)/(dx * dx) . Node 1 <= i <= n mid slab
29:         aE = (k * dt)/(dx * dx)
30:         aP = aE + aW + 1
31:
32:         T1(i, i - 1) = -aW T(i, i) = aP T(i, i + 1) = -aE . Populate temperature array
33:
34:         s(i) = 0 . Populate source array
35:         ElseIf i = N - 1 do
36:           aW = (k * dt)/(dx * dx) . Node n boundary
37:           aE = 0
38:           Su = T(i)
39:           aP = aE + aW + 1
40:
41:           T1(i, i - 1) = -aW T(i, i) = aP . Populate temperature array
42:
43:           s(i) = Su . Populate source array
44:         EndIf
45:       EndFor
46: Time = Time + dt
47: EndWhile
48: Solve matrix T1x = S
49: output solve matrix T1x = S
50: update T = Solve matrix T1x = S
51: End

```

---

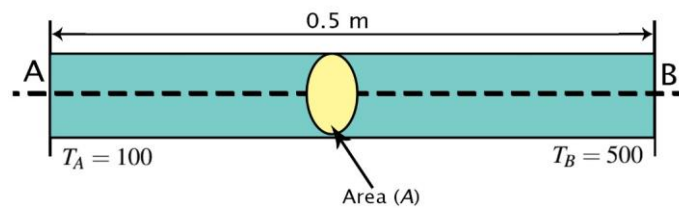
Untuk algoritma kondisi tidak tunak, hampir sama dengan kondisi tunak akan tetapi sebelum pengecekan titik, membuat terlebih dahulu kondisi awal dengan algoritma  $T(i) = \sin(\pi \times 2 \times (dx \times (i - 1)))$  dengan i dari titik 1 sampai N (akhir). Setelah itu kemudian dibuatkan grafiknya.

Lalu sebelum algoritma pengulangan untuk titik, ditambahkan pengulangan untuk waktu, sehingga waktu akan berjalan sebelum waktu melebihi waktu final ( $T_{final}$ ). Selanjutnya proses sama seperti algoritma kondisi tunak hingga algoritma selesai, yang membedakan hanya rumus yang digunakan karena telah dimodifikasi dan bergantung pada waktu.

## 4. Evaluasi

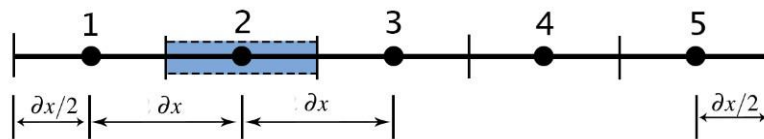
### 4.1 Studi Kasus untuk Kondisi Tunak (Steady)

Kasus yang dibahas pada jurnal ini adalah proses difusi pada satu dimensi dalam kondisi tunak (steady). Kasus tersebut memiliki suhu di sebelah barat (west) dengan nilai 100 lalu divariabelkan oleh  $T_A$  dan di sebelah timur (east) dengan nilai 500 lalu divariabelkan oleh  $T_B$ . Panjang dari domain  $x$  adalah 0,5 m dengan thermal konduktivitas  $k$  sebesar 1000 W/m.K. Dari variabel yang telah disebutkan, dapat digambarkan pada Gambar 5.



Gambar 5. Kondisi kasus difusi keadaan tunak

Dari Gambar 5, dapat dibuat titik titik diantara titik A sampai titik B. Proses ini untuk pembentukan diskrit domain yang selanjutnya dapat dicari nilai titiknya menggunakan rumus (21). Dapat digambarkan pada Gambar 6.



Gambar 6. Diskrit domain

Aplikasi dari metode volume hingga untuk mencari solusi dari persamaan difusi sederhana dalam kasus perpindahan konduktivitas panas akan dijelaskan pada bagian ini. Persamaan satu dimensi dalam kondisi tunak untuk perpindahan panas dapat dirumuskan dengan persamaan (12), dimana konduktivitas termal ( $k$ ) diganti dari variabel  $\Gamma$  dan variabel bebas adalah suhu ( $T$ ). Variabel  $S$  didapat jika menjadi pembangkit panas karena arus listrik yang melewati batang pada kondisi batas. Karena pada kasus ini tidak terdapat variabel  $S$ , sehingga dapat diabaikan.

Kondisi pada kasus difusi dalam keadaan tunak memiliki nilai suhu pada kedua ujung batang yang terisolasi dengan suhu konstan sebesar 100°C dan 500°C, yang dapat dilihat pada Gambar 5. Untuk variabel  $dx$  atau jarak tiap titik diberikan sebesar 0,1 m serta nilai konduktivitas termal  $k$  sebesar 1000 W/m.K dengan luas area  $A$  sebesar  $10 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ .

Setelah memperoleh titik sebanyak 5 titik seperti pada Gambar 6, dapat dihitung setiap titiknya untuk mendapatkan nilai yang dihasilkan dengan rumus dari persamaan (20) dengan memodifikasi variabel yang telah ditentukan.

Karena konduktivitas termal ( $k$ ), luas area ( $A$ ) dan jarak titik ( $dx$ ) memiliki nilai konstan pada setiap titik, maka nilai  $k = k_e = k_w$ ,  $A = A_w = A_e$ , dan  $dx$  bernilai sama setiap titik.

Untuk memperoleh nilai pada titik 1, dapat menggunakan persamaan (19). Hal tersebut dikarenakan titik 1 tidak mempunyai tetangga pada sebelah barat (west) atau setelah batas barat sehingga membutuhkan perhatian khusus untuk mencarinya dan tidak bisa menggunakan persamaan (20) dikarenakan variabel yang berkaitan dengan titik barat (west) masih dalam kondisi implisit.

Pada variabel  $\phi_w$  di persamaan (19) diganti dengan variabel  $T_A$  dan variabel  $\partial_{xw} P$  diganti dengan  $dx/2$  hal ini dikarenakan batas titik 1 sebelah barat merupakan titik  $T_A$  dan jaraknya sebesar setengahnya dari jarak titik 1 ke 2.

Begitupun untuk titik 5 atau titik akhir, terdapat perubahan variabel untuk  $\phi_E$  dan  $\partial_{xE} P$  yang masing-masing digantikan dengan  $T_B$  dan  $dx/2$ .

Dikarenakan titik 1 dan titik 5 terdapat perubahan rumus, sehingga untuk titik 1 dan 5 terdapat nilai  $S_u$  dan  $S_p$ . Pada titik 1 untuk variabel  $S_u$  adalah  $(2kA/dx)T_1$  dan variabel  $S_p$  adalah  $2kA/dx$ . Sedangkan pada titik 5 untuk variabel  $S_u$  adalah  $(2kA/dx)T_5$  dan variabel  $S_p$  sama seperti titik 1 yaitu  $2kA/dx$ . Dengan begitu untuk mencari  $ap$  pada titik 1 didapati dari rumus  $ap = 0 + as - Sp$  dan untuk titik 5 dapat diperoleh dari rumus  $ap = aw + 0 - Sp$ .

Dengan proses diskritisasi yang telah dibuat, maka dapat menghasilkan nilai atau solusi dari masing - masing titik 1 hingga 5. Nilai dari variabel  $kA/dx = 100$  dan koefesien dari setiap persamaan yang didiskritkan dapat dengan mudah dikerjakan. Nilai - nilai tiap variabel dapat dilihat pada tabel 7. Hasil perhitungan dengan menggunakan rumus (20) dapat ditulis dalam persamaan aljabar sebagai berikut

$$\begin{aligned} 300T_1 &= 100T_2 + 200T_A \\ 200T_2 &= 100T_1 + 100T_3 \\ 200T_3 &= 100T_2 + 100T_4 \\ 200T_4 &= 100T_3 + 100T_5 \\ 300T_5 &= 100T_4 + 200T_B \end{aligned}$$

Node	aw	AE	$S_u$	$S_p$	$ap = aw + aE - Sp$
1	0	100	$200T_A$	-200	300
2	100	100	0	0	200
3	100	100	0	0	200
4	100	100	0	0	200
5	100	0	$200T_B$	-200	300

Tabel 3. Nilai dari setiap titik pada variabel  $aw$ ,  $AE$ ,  $S_u$ ,  $S_p$  dan  $ap$

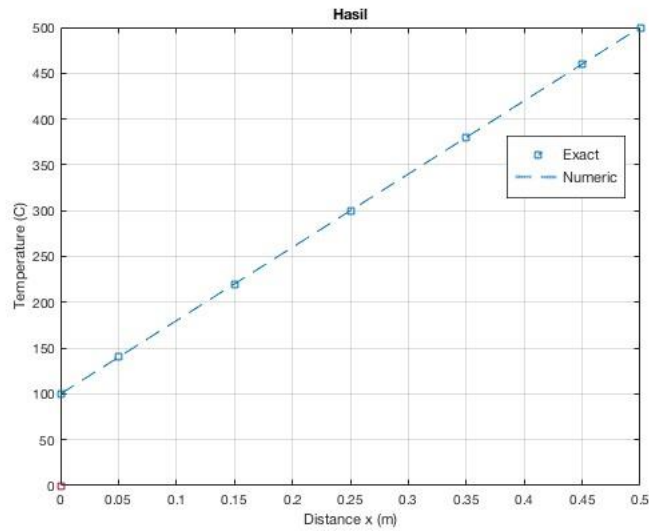
Selain dapat dibentuk dalam tabel, hasil perhitungan juga dapat dibuat kedalam matrix berordo 5 x 5 seperti berikut

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & -10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200T_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200T_B \end{pmatrix}$$

Proses ini kemudian diolah untuk mencari nilai dari variabel  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$ , dan  $T_5$  dengan menggunakan aplikasi Matlab untuk mendapatkan nilai suhu di titik 1 sampai 5 dengan proses eliminasi Gaussian. Hasil dari eliminasi Gaussian dapat dilihat pada matrix berikut

$$\begin{pmatrix} f \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 460 \end{pmatrix}$$

Untuk solusi eksak (*exact*) dari hasil numerik yang telah didapat, dapat menggunakan persamaan temperatur dengan rumus:  $T = 800x + 100$ . Sehingga dapat diketahui hasil numerik beserta dengan solusi eksak yang digambarkan pada Gambar 7 yang diproses menggunakan aplikasi Matlab dengan algoritma pada subab 3.2.



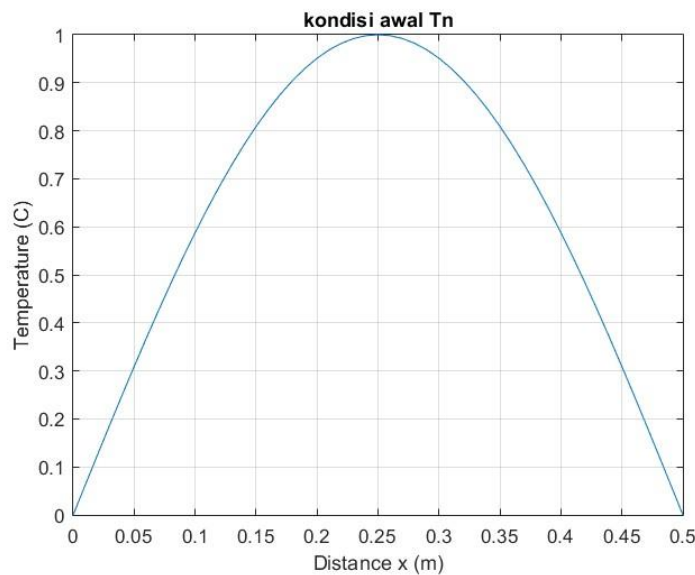
Gambar 7. Hasil persamaan difusi kondisi tunak.

Dimana garis putus-putus merupakan solusi eksaknya dan simbol titik merupakan nilai dari hasil solusi numerik.

Dari hasil yang didapat, dapat diketahui berapa suhu pada titik 0 sampai 0,5 yang disebabkan oleh reaksi difusi dengan suhu di titik 0 (TA) adalah 100°C dan di titik 0,5 (TB) adalah 500°C. Dimana antara titik 0 sampai titik 0,5 terdapat 5 titik dengan besaran suhu yang didapatkan dari proses perhitungan numerik pada persamaan difusi.

#### 4.2 Studi Kasus untuk Kondisi Tidak Tunak (Unsteady)

Pada kasus difusi untuk kondisi tidak tunak sendiri memiliki kondisi awal. Dimana kondisi awal tersebut merupakan grafik pada Gambar (8).



Gambar 8. Kondisi awal distribusi panas pada saat  $T(x,0) = \sin(\frac{\pi x}{2})$

Kondisi tidak tunak membutuhkan kondisi awal karena kondisi tunak berkaitan dengan waktu, sehingga pada waktu tertentu akan mengetahui kondisinya pada saat waktu tersebut.

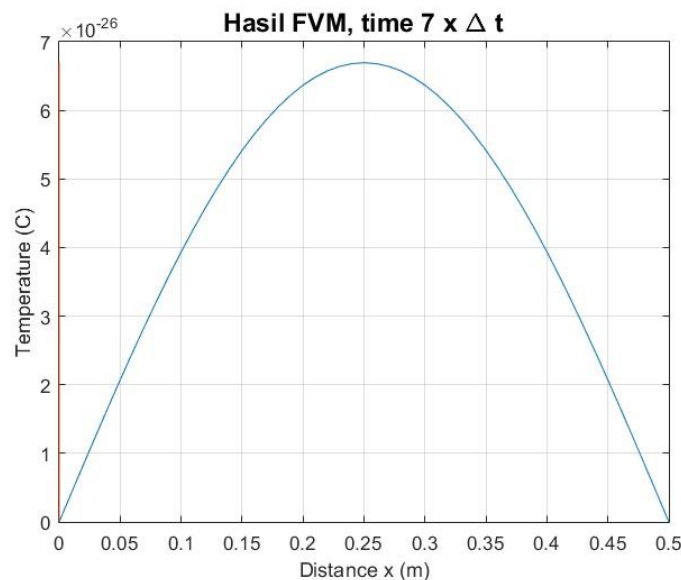
Kasus untuk kondisi tidak tunak ini memiliki jumlah titik yang lebih banyak dari kondisi tunak, yaitu sebanyak 50 titik. Sehingga matrix yang dihasilkan berordo 50 x 50.

Proses perhitungan pada kondisi tidak tunak tidak terlalu berbeda dengan kondisi tunak, akan tetapi ada penambahan variabel waktu yang mempengaruhinya. Sehingga persamaan yang akan dihitung dapat menggunakan persamaan (22) dengan mengabaikan variabel S karena tidak ada sumber pada kondisi tidak tunak unsteady serta menambahkan variabel waktu. Persamaan dapat ditulis seperti persamaan (27).

Proses pendiskritan persamaan difusi untuk kondisi tidak tunak telah dijelaskan pada subbab 2.3 sehingga persamaan yang akan digunakan untuk perhitungan pada setiap titiknya menggunakan persamaan (27).

Dari bentuk persamaan (27) kemudian dapat menghitung solusi nilai untuk titik 1 dengan asumsi yang sama pada kondisi tunak yaitu variabel untuk  $T_w^{n+1}$  akan ditekan menuju 0 dan variabel  $\Gamma$  diganti oleh variabel K yang merupakan variabel konstanta konduktivitas termal dengan asumsi  $K = K_c = K_w$  yang telah dijelaskan pada kondisi tunak.

Dikarenakan hasil solusi dari kasus kondisi tidak tunak menghasilkan matrik berordo 50 x 50 yang disebabkan jumlah titik sebanyak 50, maka untuk melakukan perhitungannya menggunakan aplikasi Matlab. Selanjutnya menggunakan eliminasi Gaussian Jordan untuk mendapatkan nilai  $T_1^{n+1}$  sampai  $T_N^{n+1}$  dimana variabel N merupakan jumlah titik yang diproses, dalam kasus ini menggunakan 50 titik. Langkah tersebut sama dengan langkah pada kondisi tunak, dengan hasil akhir berupa gambar grafik yang dapat pada Gambar 9.

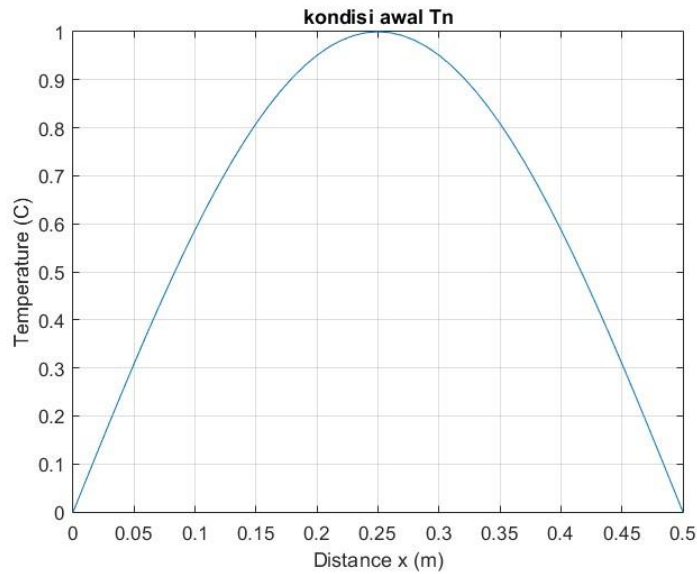


Gambar 9. Hasil persamaan difusi kondisi unsteady

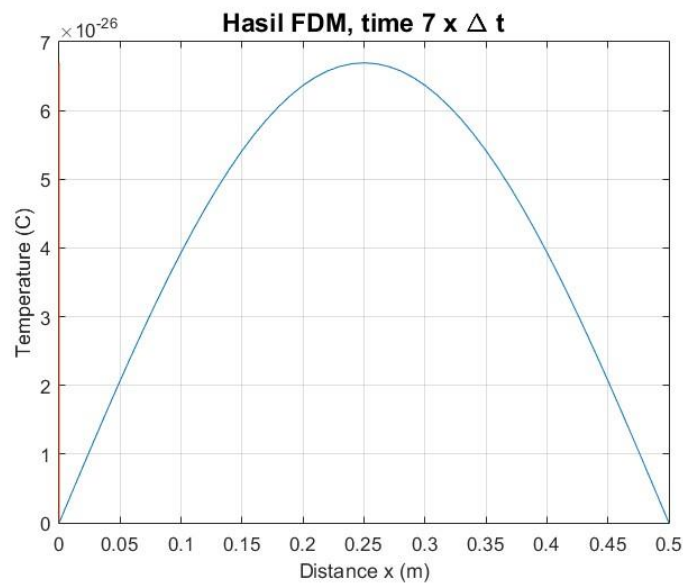
Untuk kondisi tidak tunak dengan kondisi awal berupa seperti pada Gambar 8, dengan jumlah titik sebanyak 50 titik, mengalami penurunan suhu. Hal itu dapat dilihat pada Gambar 9 merupakan proses akhir dimana waktu yang berjalan telah berhenti dikarenakan lamanya waktu yang telah ditetapkan. Dimana Gambar 8 memiliki perbedaan dari Gambar 9 dimana suhu dari titik 2 sampai titik 49 mengalami penurunan sedangkan untuk di kedua ujung titik tetap yaitu 0'.

Untuk proses difusi selain pada metode volume hingga, terdapat juga pada metode beda hingga (finite different). Pada metode beda hingga, persamaan difusi dapat diperoleh dari rumus  $T_k^{n+1} = rT_{k+1}^n - (1 + 2r)T_k^n + rT_{k-1}^n$  dengan

r merupakan  $\Gamma 4t / 4x^2$ ,  $4t$  merupakan selisi waktu, dan  $4x$  merupakan selisih jarak antar titik. Hasil dari proses difusi untuk metode beda hingga dapat dilihat pada Gambar 11 dengan kondisi awal seperti pada Gambar 10.



Gambar 10. Kondisi awal pada proses difusi untuk metode beda hingga



Gambar 11. Hasil persamaan difusi pada metode beda hingga

Dari hasil difusi pada kedua metode antara metode beda hingga dan metode volume hingga, dapat dilihat proses penurunan suhu yang sama, dengan suhu tertinggi pada kondisi awal sebesar 1°C setelah dilakukan proses difusi maka suhu menjadi  $0.6694 \times 10^{-26}$  C. Sedangkan pada metode volume hingga suhu tertinggi pada kondisi awal sebesar 1°C setelah dilakukan proses difusi maka suhu turun menjadi 0.7170C. Hal itu menunjukkan bahwa hasil yang didapati dari proses metode FVM dan FDM sama. Yang membedakan hanya pada proses perhitungan, dimana metode FDM menggunakan deret Taylor untuk menghitung titik P membutuhkan sebelum dan sesudahnya titik P. Sedangkan metode FVM untuk menghitung titik P membutuhkan nilai batas barat (west) dan timur (east).



## 5. Kesimpulan

Berdasarkan pada hasil proses difusi pada metode volume hingga dengan kondisi tunak dan tidak tunak, telah didapati sebuah grafik yang menunjukkan besaran suhu antara kedua ujungnya pada sebuah pipa yang berisi. Grafik yang dihasilkan dari kondisi tunak bersifat linier dikarenakan menggunakan persamaan difusi yang linier dengan grafik lurus naik dengan suhu sebesar  $100^{\circ}\text{C}$  pada titik awal dan  $500^{\circ}\text{C}$  pada titik akhir. Dengan begitu dapat dilihat besaran suhu sepanjang pipa berisi atau dapat dilihat pada Gambar 7. Untuk hasilkan dari kondisi tidak tunak berupa penurunan grafik yang mengalami penurunan suhu pada titik tengah panjang pipa berisi, sehingga besaran suhu turun dari  $1^{\circ}\text{C}$  ke  $0.6694 \times 10^{-26}\text{C}$ . Semakin lama waktu berjalan, maka suhu akan turun mendekati nilai  $0^{\circ}\text{C}$ . Kemudian hasil grafik dari kondisi tidak tunak dengan metode beda hingga dibandingkan dengan proses difusi menggunakan metode beda hingga. Dengan dilakukan perbandingan, maka diperoleh grafik penurunan suhu yang sama antara metode volume hingga dan metode beda hingga. Yang membedakan hanya variabel yang dibutuhkan untuk proses perhitungannya.

## Daftar Pustaka

- [1] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. Finite volume methods. *Handbook of numerical analysis*, 7:713–1018, 2000.
- [2] R. Haberman. *Applied Partial Differential Equations: with Fourier Series and Boundary Value Problems, Fourth Edition*. Pearson Education, 2005.
- [3] R. J. LeVeque. Finite difference methods for differential equations. *Draft version for use in AMath*, 585(6), 1998.
- [4] G. Mompean and M. Deville. Unsteady finite volume simulation of oldroyd-b fluid through a three-dimensional planar contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 72(2-3):253–279, 1997.
- [5] S. Phongthanapanich and P. Dechaumphai. Finite volume element method for analysis of unsteady reaction-diffusion problems. 25:481–489, 08 2009.
- [6] H. K. Versteeg and W. Malalasekera. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Pearson Education, 2007.
- [7] J. G. Wijmans and R. W. Baker. The solution-diffusion model: a review. *Journal of membrane science*, 107(1-2):1–21, 1995.