

Simulasi Numerik Shallow Water Equations Menggunakan Skema Eksplisit Collocated Lax-Friedrichs Finite Volume Method

Rasyadan Farouq¹, Didit Adytia²

^{1,2,3}Fakultas Informatika, Universitas Telkom, Bandung

⁴Divisi Digital Service PT Telekomunikasi Indonesia

¹raaasya@students.telkomuniversity.ac.id, ²diditadytia@telkomuniversity.ac.id

Abstrak

Shallow Water Equations (SWE) banyak digunakan dalam menggambarkan fenomena alam seperti tsunami, *flow model* untuk arus, dan lain-lain serta dapat dimodelkan secara matematis. Metode numerik yang digunakan adalah *Finite Volume Method* (FVM) menggunakan skema *collocated explicit Lax-Friedrichs* (CLF). Pemilihan SWE dan metode CLF untuk menyimulasikan fenomena tersebut dikarenakan penggunaan SWE terhadap simulasi fluida dapat dikatakan ideal dan penggunaan CLF dipilih dikarenakan kesederhanaannya dalam hal komputasi. Simulasi ini menggambarkan bagaimana fenomena *dam break flow* menggunakan skema CLF. Dengan nilai MSE terbesar dengan nilai 0.002193157 dan nilai MSE terkecil dengan nilai 0.000381774.

Kata kunci : *Shallow Water Equations, Lax-Friedrich, Finite Volume Method, Dam Break*

Abstract

Shallow Water Equations (SWE) is frequently used to depict natural phenomena such as tsunami, stream flow model, and simulated mathematically. The numerical method used is *Finite Volume Method* (FVM) using *collocated explicit Lax-Friedrich* (CLF) scheme. Selection of SWE and CLF method to simulate the phenomenon because SWE is ideal for fluid simulation and CLF picked because of its simplicity in computational. This simulation will depict dam break phenomenon using CLF scheme. With biggest MSE value is 0.002193157 and smallest MSE value is 0.000381774.

Keywords: *Shallow Water Equations, Lax-Friedrich, Finite Volume Method, Dam Break*

1. Pendahuluan

Fluida tidak dapat kita pisahkan dari kehidupan dan sering kita jumpai pada kehidupan sehari-hari. Suatu fluida dapat dikatakan dinamis apabila fluida tersebut bergerak atau mengalir, dan dapat dikatakan ideal apabila memiliki sifat tidak dapat dimampatkan (*incompressible*), massa jenis fluida tidak kental (*inviscid*) dan tidak berolak [1]. Fenomena fluida yang disajikan adalah *dam break* yaitu dimana ada sebuah *dam* atau bendungan pembatas diantara dua permukaan air yang memiliki ketinggian yang berbeda pada kedua sisi mengalami kerusakan sehingga terjadi kebocoran. Kebocoran terhadap *dam* itu mempengaruhi air pada sisi *dam* yang memiliki permukaan air yang lebih tinggi sehingga dapat menyebabkan kerusakan yang signifikan. Hasil dari simulasi dapat digunakan untuk memprediksi bentuk gelombang akibat *dam break*, sehingga dapat diantisipasi.

Fenomena *dam break* akan disimulasikan menggunakan metode numerik *Shallow Water Equations* (SWE) dengan menggunakan *Finite Volume Method* (FVM) dengan skema *collocated Lax-Friedrich* (CLF). Batasan – batasan masalah yang digunakan antara lain adalah persamaan pembangkit yang digunakan SWE satu dimensi yang disimulasikan pada fenomena *dam break* satu dimensi.

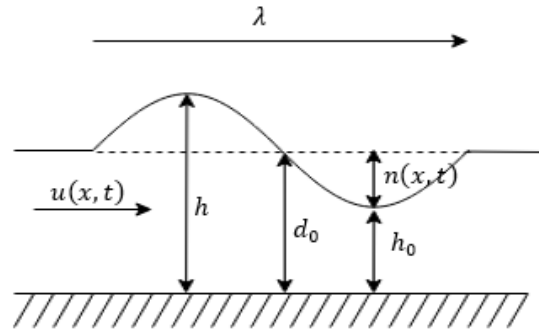
Bagaimanapun penyelesaian SWE dapat dikatakan sulit apabila dilakukan secara analitik, maka dari itu solusi numerik merupakan salah satu solusi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan SWE [2]. FVM adalah salah satu metode numerik untuk merepresentasikan dan mengevaluasi persamaan diferensial parsial ke dalam bentuk persamaan aljabar [3]. Metode *Lax-Friedrich schemes* adalah salah satu metode skema eksplisit klasik tiga titik untuk solusi persamaan diferensial parsial [3] yang termasuk kedalam FVM. Metode *Lax-Friedrich* juga dianggap lebih efisien dan sederhana dalam hal komputasi [2].

Pada tugas akhir ini metode CLF digunakan untuk memecahkan persamaan SWE dan disimulasikan pada fenomena *dam break*.

2. Persamaan Pengatur dan Topografi Dam

Shallow Water Equations

Shallow Water Equations (SWE) merupakan persamaan sistem hiperbolik yang dapat digunakan untuk mendeskripsikan beragam fenomena yang berhubungan dengan aliran fluida. Pada SWE, profil permukaannya dipengaruhi oleh profil kedalaman [1] dan hanya berlaku ketika $\lambda \gg d_0$ yang dimana variabel λ adalah panjang gelombang, dan variabel d_0 adalah kedalaman air, bentuk topografi fenomena persamaan air dangkal dapat dilihat pada Gambar 2.1



Gambar 2.1 Fenomena persamaan air dangkal

Persamaan air dangkal memiliki 2 variabel yang tidak tentu yaitu kedalaman air dan kecepatan air, persamaan air dangkal terdiri dari dua persamaan yaitu, persamaan kontinuitas dan persamaan momentum [2]. Bentuk persamaan air dangkal pada topografi horizontal adalah,

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \quad (2.1)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) = 0 \quad (2.2)$$

Persamaan (2.1) adalah persamaan kontinuitas dan persamaan (2.2) diatas adalah persamaan momentum yang dimana, variabel x adalah variabel jarak, t adalah variabel waktu, $h = h(x, t)$ adalah kedalaman air, $u = u(x, t)$ adalah kecepatan, dan $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ adalah percepatan dikarenakan gravitasi.

Finite Volume Method

Finite volume method (FVM) adalah salah satu metode numerik untuk merepresentasikan dan mengevaluasi persamaan diferensial parsial ke dalam bentuk persamaan aljabar [3]. Dari persamaan (2.1) kedua persamaan baik persamaan (2.1) dan persamaan (2.2) keduanya memiliki bentuk hukum konservasi massa yang memiliki bentuk $q_t + f(q)_x = 0$, dimana variabel q adalah kuantitas dan $f(q)$ adalah fungsi fluks. Bentuk konservatif dari *finite volume method* adalah:

$$\frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0 \quad (2.3)$$

Pada persamaan (2.3) variabel Δt adalah selisih waktu, variabel Δx adalah selisih jarak, variabel Q_i^n asimtotik terhadap $q(x_i, t^n)$, dan variabel $F_{i+\frac{1}{2}}^n$ asimtotik terhadap $f((x_{i+\frac{1}{2}}, t^n))$. Dimana fungsi $F_{i+\frac{1}{2}}^n$ dan $F_{i-\frac{1}{2}}^n$ untuk skema *Lax-Friedrich* persamaan (2.1) adalah:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}[u_i^n h_i^n + (u_{i+1}^n h_{i+1}^n)] - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(h_{i+1}^n - h_i^n) \quad (2.4)$$

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}[u_i^n h_i^n + (u_{i+1}^n h_{i+1}^n)] - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(h_i^n - h_{i-1}^n) \quad (2.5)$$

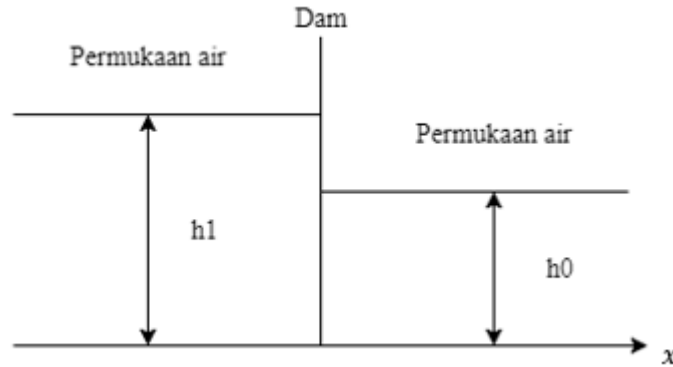
Dan $F_{i+\frac{1}{2}}^n$ dan $F_{i-\frac{1}{2}}^n$ untuk persamaan (2.2) adalah:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}\left[\left((u_i^n)^2 h_i^n + \frac{1}{2}g(h_i^n)^2\right) + \left((u_{i+1}^n)^2 h_{i+1}^n + \frac{1}{2}g(h_{i+1}^n)^2\right)\right] - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n h_{i+1}^n - u_i^n h_i^n) \quad (2.6)$$

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left[\left((u_{i-1}^n)^2 h_{i-1}^n + \frac{1}{2} g (h_{i-1}^n)^2 \right) + \left((u_i^n)^2 h_i^n + \frac{1}{2} g (h_i^n)^2 \right) \right] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_i^n h_i^n - u_{i-1}^n h_{i-1}^n) \quad (2.7)$$

Dam Break

Topografi fenomena *dam break* di ilustrasikan pada Gambar 2.2, dimana dinding *dam* berada di posisi $x = 0$, h_0 adalah tinggi permukaan air pada sisi kanan *dam* dan h_1 adalah tinggi sisi permukaan air di sisi kiri



dam.

Dari penjelasan diatas dapat diketahui bagaimana kondisi *dam* dapat diselesaikan secara matematis dimana salah satu metode yang paling banyak digunakan adalah SWE. Persamaan SWE disimulasikan pada *dam break* menggunakan metode numerik CLF-FVM.

3. Model Numerik

Pada penelitian ini, untuk mendekati solusi analitik akan digunakan *Finite Volume Method* dengan skema collocated Lax-Friedrich dimana metode skema Lax-Friedrich adalah salah satu metode skema eksplisit klasik tiga titik untuk solusi persamaan diferensial parsial [4] sebagai solusi numerik satu dimensi. Dalam solusi numerik ini terdapat diskritisasi yang merubah persamaan (2.1)-(2.2) kedalam bentuk matriks menjadi:

Gambar 2.2 Kondisi awal dari *dam break*

$$\partial_t \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix} = -\partial_x \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Dimana lalu persamaan (2.1) diubah sesuai dengan variabel persamaan (2.3) sehingga menjadi:

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}; \vec{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Dimana $F_1 = hu$ dan $F_2 = hu^2 + \frac{1}{2} gh^2$, sehingga:

$$\partial_t Q = -\partial_x F \quad (3.3)$$

Kemudian dilakukan diskritisasi ruang dan waktu pada persamaan (3.3), sehingga didapat bentuk konservatif:

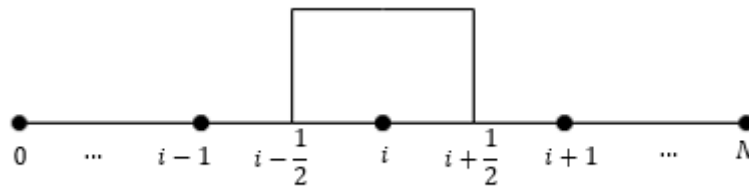
$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (3.4)$$

Lalu dari persamaan (3.4) didiskritisasi terhadap matriks baris pertama dimana $Q = h$ dan $F = hu$ sehingga didapat skema Lax Friedrich terhadap ketinggian sehingga didapat:

$$h_i^{n+1} = \frac{1}{2} (h_{i-1} + h_{i+1}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} ((hu)_{i+1} - (hu)_{i-1}) \quad (3.5)$$

Diskritisasi terhadap matriks baris kedua dimana $Q = hu$ dan $F = hu^2 + \frac{1}{2} gh^2$ dari sehingga didapat skema Lax Friedrich terhadap kecepatan:

$$(hu)_i^{n+1} = \frac{1}{2} ((hu)_{i-1} + (hu)_{i+1}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} ((hu^2) + \frac{1}{2} gh^2)_{i+1} - ((hu^2) + \frac{1}{2} gh^2)_{i-1} \quad (3.6)$$

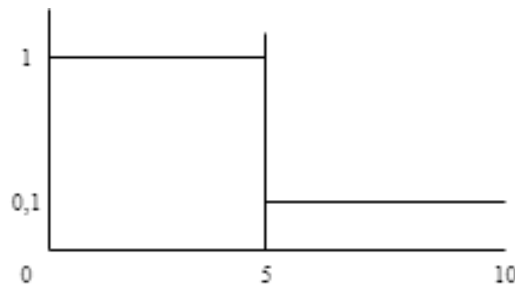


Gambar 3.3 Diskritisasi pada domain menjadi sebanyak N bagian

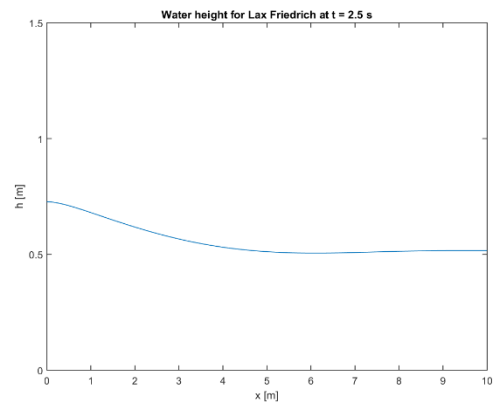
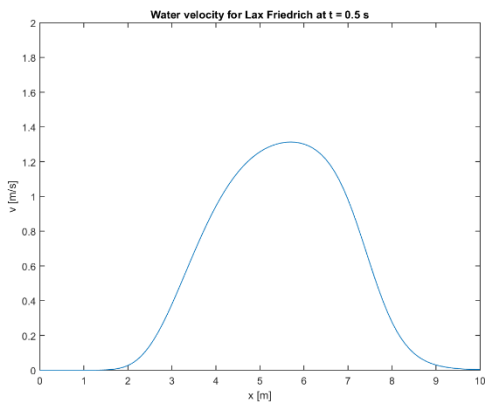
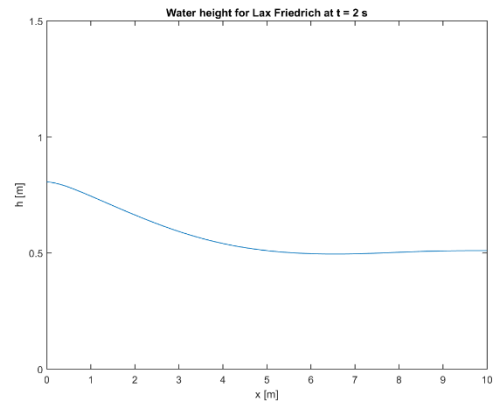
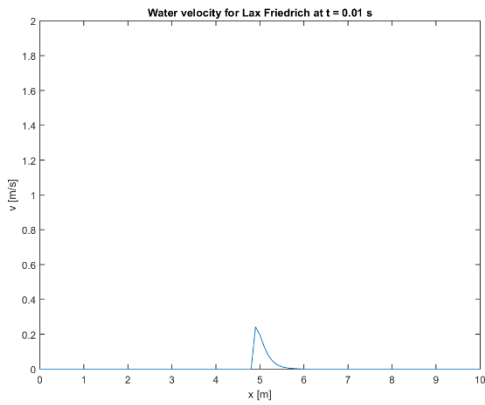
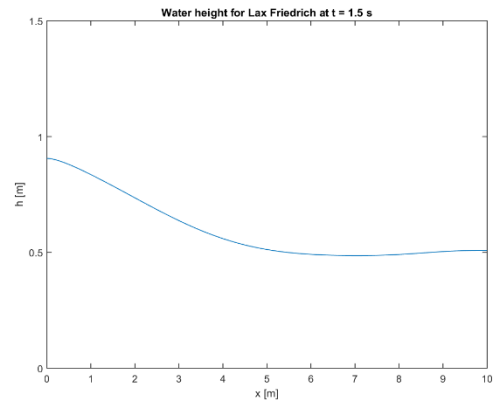
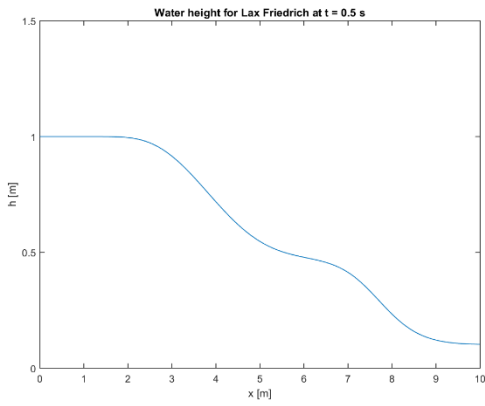
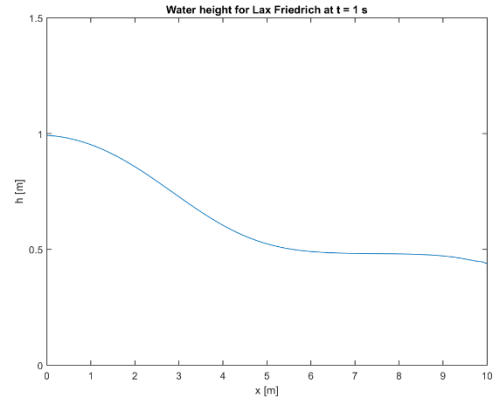
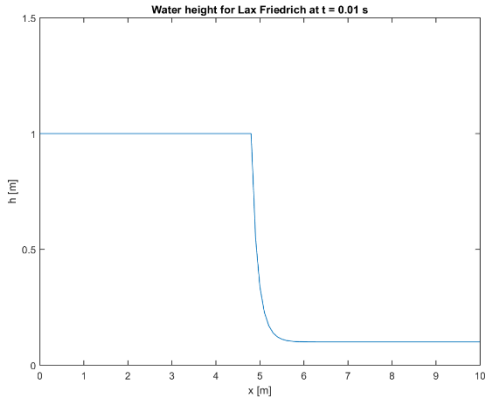
Dari gambar 3.3 Dapat dilihat bagaimana bentuk diskritisasi mejadi N bagian dimana Δt adalah langkah waktu, Δx adalah langkah spasial, i adalah indeks pada node spasial, dan n adalah node untuk langkah waktu, dan dibutuhkan nilai F yaitu fluks pada node $i \pm \frac{1}{2}$.

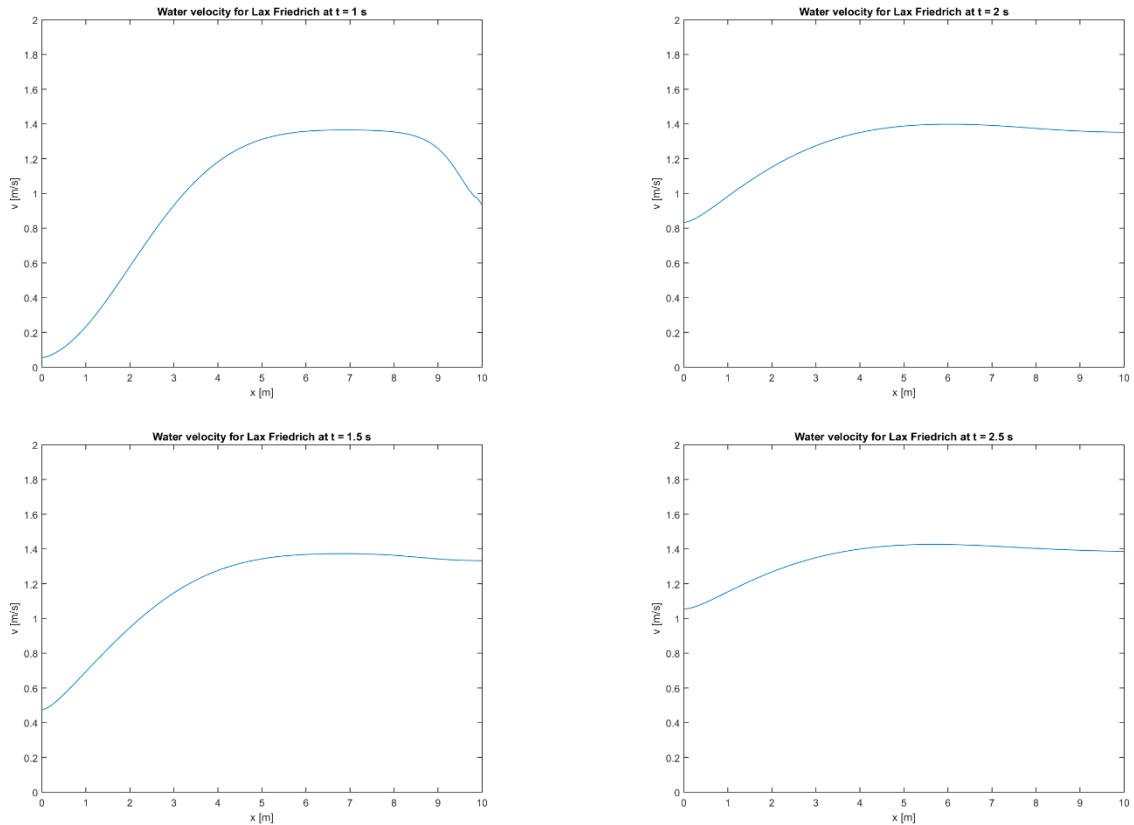
4. Evaluasi

Setelah melakukan simulasi pada grid sebanyak $n = 101$, ketinggian air pada $h_1 = 1, h_0 = 0,1$, dan kecepatan awal air $u_0 = 0 \text{ m/s}$, dan nilai gravitasi $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, dengan kondisi batas reflektif, dan disimulasikan selama $t = 5 \text{ s}$ pada selisih waktu sebesar $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ dimana ilustrasi kondisi awal *dam break* pada waktu $t = 0 \text{ s}$ dapat dilihat pada Gambar4.1.



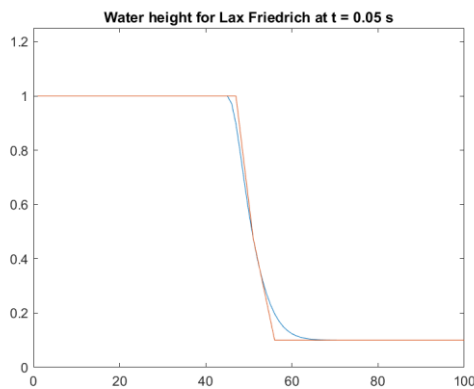
Gambar 4.1 Kondisi awal dam dengan perbedaan ketinggian $h_1 = 1, h_0 = 0,1$





Gambar 4.2 Hasil simulasi model *dam break* pada waktu t yang berbeda tiap $\pm 0,5$ detik

Pada gambar 4.2, *dam* diletakan pada sumbu x di titik 5 dimana dapat dilihat simulasi numerik CLF-FVM pada kolom gambar sebelah kiri merupakan perubahan ketinggian air, sedangkan di kolom gambar sebelah kanan merupakan perubahan kecepatan air.



Gambar 4.3 Perbandingan solusi numerik dengan solusi analitik terhadap ketinggian pada *dam break*

Pada gambar 4.2 dapat dilihat perbedaan gelombang pada solusi numerik dan analitik dengan nilai *mean square error* (MSE) solusi numerik pada $t = 0,05$ s, dengan jumlah titik $N = 51, 101, 201$. Nilai MSE didapat dari $MSE = \frac{\sum(S_N - S_a)^2}{N}$ dimana S_N = solusi numerik, S_a = solusi analitik, dan N = jumlah titik. Hasil simulasi dapat dilihat pada tabel 4.1, dimana nilai MSE terbesar terjadi pada simulasi $N = 51$ dengan nilai MSE sebesar 0.002193157 dan nilai MSE terkecil terjadi pada saat $N = 101$ dengan nilai 0.000381774.

Tabel 4.1 perbedaan nilai MSE pada $t = 0,05$ s terhadap ketinggian air

N	MSE
51	0.002193157
101	0.000381774
201	0.000476565

5. Kesimpulan

Setelah melakukan tiga kali simulasi numerik CLF-FVM dengan jumlah N yang berbeda untuk mencari perbandingan nilai MSE. Dengan kondisi awal *dam break* $t = 0,5$ terhadap ketinggian h , dimana nilai MSE terbesar terjadi pada simulasi $N = 51$ dengan nilai MSE sebesar 0.002193157 dan nilai MSE terkecil terjadi pada saat $N = 101$ dengan nilai 0.000381774.

Daftar Pustaka

- [1] Didit Adytia et al. (2008). Tsunami Simulation in Indonesia's Areas Based On Shallow Water Equations And Variational Boussinesq Model Using Finite Element Method. PhD thesis, Master's thesis, Institut Teknologi Bandung, Dept. Mathematics, Bandung, Indonesia.
- [2] S. Mungkasi and S. G. Roberts. (2016). Numerical Solution to the Shallow Water Equations Using Explicit and Implicit Schemes.
- [3] LeVeque, Randall. (2002). Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press.
- [4] Xinhua Lu, Bingjiang Dong, Bing Mao, and Xiaofeng Zhang. (2015). Equations Convergence Improved Lax-Friedrichs Scheme Based Numerical Schemes and Their Applications in Solving the One-Layer and Two-Layer Shallow-Water. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China.
- [5] Md.Saiduzzaman and Sobuj Kumar Ray. (2013). Comparison of Numerical Schemes for Shallow Water Equation.
- [6] S. R. Pudjaprasetya and I. Magdalena. (2014). Momentum Conservative Schemes for Shallow Water Flows. Institut Teknologi Bandung, Dept. Mathematics, Bandung, Indonesia.