

Prediksi Volatilitas Pada Return Saham PT. Telekomunikasi Indonesia Tbk Menggunakan Model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastisitas* (GARCH)

I~~XXXX~~ K~~XXXX~~ P~~XXXX~~, Jondri², Aniq Atiqi Rohmawati³

^{1,2,3}Program Studi Ilmu Komputasi, Fakultas Informatika, Telkom University

¹poeteradesign@gmail.com, ²jondri@telkomuniversity.ac.id, ³aniq@telkomuniversity.ac.id

Abstrak

Pemodelan volatilitas memegang peranan penting dalam bidang finansial. Return merupakan salah satu alat ukur yang digunakan untuk menentukan tingkat pengembalian investasi, dan investor lebih menyukai melihat nilai suatu aset dari tingkat kembalian (return). Volatilitas suatu model yang nilainya cenderung berubah terhadap waktu. Terdapat beberapa model yang sering digunakan untuk memodelkan volatilitas dari suatu data finansial. Diantaranya adalah model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastisitas* (GARCH) yang merupakan model *time series* yang mengasumsikan volatilitas tidak konstan. Dalam Tugas Akhir ini dibahas mengenai perbandingan prediksi volatilitas dari model GARCH (0,1) dan GARCH (0,2), melihat kedua model dalam mengakomodasi sifat ke stasioneran. Hasil prediksi diuji tingkat keakuratan dengan menggunakan *Root Mean Square Error* (RMSE) dengan tingkat keakuratan pada model GARCH (0,1) sebesar 0.00257 dan pada model GARCH (0,2) sebesar 0.00354. Hasil prediksi diuji tingkat keakuratan dengan menggunakan *Mean Absolute Error* (MAE) dengan tingkat keakuratan pada model GARCH (0,1) sebesar 0.00014 dan pada model GARCH (0,2) sebesar 0.00024.

Kata kunci: GARCH, RMSE, MAE, *Time series*, Return, Kestasioneran, volatilitas.

Abstract

Modelling volatility plays an important role in the financial sector. Return is one measure used to determine the return on investment, and investors prefer to see the value of an asset of the level of return. Volatility is a model that values tend to change with time. There are several models that are often used to model the volatility of a financial data. Among them are models Generalized Autoregressive Heteroskedastisitas (GARCH) which is a time series model that assumes volatility is not constant. In this final project is discussed about the comparison predictions volatility of GARCH (0,1) and GARCH (0,2), see both models in nature to accommodate late stationary. The results were tested prediction accuracy using the Root Mean Square Error (RMSE) with a degree of accuracy in the GARCH (0,1) of 0.00257 and the GARCH (0,2) of 0.00354. The results were tested prediction accuracy using the Mean Absolute Error (MAE) with the level of accuracy in the GARCH (0,1) of 0.00014 and the GARCH (0,2) of 0.00024.

Keywords: GARCH, RMSE, MAE, Time series, Return, Stasionary, volatility.

1. PENDAHULUAN

Di era globalisasi ini teknologi berkembang dengan cepat, teknologi komunikasi data salah satu contoh bidang yang dibutuhkan untuk menunjang kemajuan teknologi. Kemajuan teknologi pada bidang komunikasi data harus sesuai dengan perusahaan yang menyediakan layanannya. Salah satu perusahaan yang memberi pelayanan komunikasi data terbesar di Indonesia adalah PT. Telekomunikasi Indonesia Tbk. Perusahaan yang saham terbesarnya dimiliki oleh negara yaitu sebesar 51,19% dan saham sisanya dibuka untuk publik sebesar 48,81%.

Saham dibuka untuk publik sebesar 48,81%, maka diperlukan adanya pemodelan matematik yang dapat memberikan gambaran perkembangan harga saham kepada investor tentang bagaimana kinerja sebuah bursa selama waktu tertentu. Melihat hasil prediksi dari perhitungan model yang penulis gunakan, maka investor dapat memperkirakan dengan tepat berapa potensi risiko pasar dari suatu saham dengan melihat variansi pengembalian harga saham. Jadi investor dapat memprediksi peluang tingkat pengembalian saham dalam periode tertentu (*Return*).

Return suatu saham dipengaruhi oleh volatilitasnya, volatilitas merupakan ukuran yang mengukur risiko dari aset finansial [1].

Model volatilitas yang baik adalah model yang dapat memenuhi dan mengakomodasi sifat kestasioneran dari sebuah return saham. Data *time series* (*Time series*) pada analisis keuangan biasanya memiliki variansi return saham yang tidak konstan disetiap titik waktunya. Salah satu cara untuk mengakomodasi heteroskedastisitas adalah dengan pemodelan variansi yang dapat melakukan prediksi dengan tepat, artinya penyimpangan antar variansi empiris dengan variansi prediksi tidak terlalu jauh berbeda. Salah satu model *Time series* yang mengakomodasi heteroskedastisitas adalah model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastisitas* (GARCH) [2].

Dari pemaparan diatas, dilakukan prediksi terhadap return dengan menggunakan model *time series*, dengan membandingkan antara model GARCH (0,1) dan model GARCH (0,2) serta menganalisis kestasioneran data untuk menentukan batas parameter agar variansi prediksi dari model dapat dinyatakan stasioner.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Return merupakan hasil yang diperoleh dari

investasi atau tingkat keuntungan yang dinikmati oleh pemodal atas suatu investasi yang dilakukannya. Tanpa

keuntungan yang diperoleh dari suatu investasi yang

dilakukannya, tentunya investor tidak mau melakukan investasi yang tidak ada hasilnya. Setiap investasi, baik jangka pendek maupun jangka panjang mempunyai tujuan utama yaitu memperoleh keuntungan atau peluang tingkat pengembalian saham dalam periode tertentu yang juga disebut return, baik secara langsung maupun tidak langsung[8]. Konsep return atau kembalikan adalah tingkat keuntungan yang dinikmati oleh pemodal atas suatu investasi yang dilakukannya. Return saham merupakan income yang diperoleh oleh pemegang saham sebagai hasil dari investasinya di perusahaan tertentu.

Dalam pasar uang, investor cenderung memilih untuk memodelkan return dari pada harga. Tsay memberikan alasan yang menyebabkan return lebih banyak digunakan dibandingkan dengan harga. Return memiliki ringkasan investasi lebih lengkap dan bebas dari skala, return lebih mudah didekati dengan nilai statistik dibandingkan harga. Nilai return positif menyatakan keuntungan dan nilai return negatif menyatakan kerugian. Tsay (2005) mendefinisikan return menjadi dua macam return yaitu return sederhana dan return majemuk[8].

Bentuk Return sederhana pada waktu (t-1) ke t dinyatakan sebagai:

$$1 + r_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

Misalkan P_t menyatakan harga aset pada waktu t dan r_t menyatakan return sederhana aset pada waktu t. Bentuk umum dari return sederhana untuk k periode, yaitu

$$\begin{aligned}
 1 + r_t &= \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (2.1) \\
 &= \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdots \frac{P_{t-1}}{P_{t-1}} \\
 &= (1 + r_{t-1})(1 + r_{t-2}) \cdots (1 + r_{t-1}) \\
 &= \prod_{i=0}^{k-1} (1 + r_{t-i})
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, k periode hanya menunjukkan hasil perkalian dari return sederhana pada interval waktu

$$R_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdots \frac{P_{t-1}}{P_{t-1}} \right) \\
 &= \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) + \ln \left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \right) + \cdots + \ln \left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-1}} \right) \\
 &= R_{t-1} + R_{t-2} + \cdots + R_{t-1} \\
 &= \sum_{i=0}^{k-1} R_{t-i}
 \end{aligned}$$

Dari rumusan diatas didapat bahwa return majemuk selama k periode merupakan jumlah dari return majemuk hariannya. Ini menunjukkan bahwa return majemuk memenuhi sifat aditif. Oleh karena itu, return majemuk sering digunakan untuk menghitung return aset[9].

Volatilitas dikatakan persisten jika nilai return saat ini berpengaruh terhadap nilai variansi beberapa waktu ke depan. Volatilitas yang menunjukak presistensi mengakibatkan variansi bersyaratnya tidak konstan sehingga dibutuhkan model daret waktu yang mengasumsikan bahwa variansi tidak konstan terhadap waktu. Pada tugas akhir ini digunakan model *time series* dengan volatilitas sebagai fungsi yang terobservasi, yaitu GARCH(0,1) dan GARCH(0,2).

Keakuratan dalam menaksir parameter pada model *time series* ikut berperan dalam menentukan seberapa sesuai model *time series* yang digunakan. Metode Likelihood merupakan salah satu metode yang sering digunakan untuk menaksir parameter. Fungsi likelihood adalah fungsi densitas yang dianggap sebagai fungsi:

$$L(\theta) = f(x|\theta), \theta \in \Theta$$

Metode estimasi mendefinisikan MLE dari θ :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\text{argmax}} L(\theta)$$

Penaksiran parameter dari distribusi normal menggunakan metode MLE, distribusi normal θ yang

diasmusikan dengan mean (μ) dan variansi(σ^2), memiliki fungsi peluang:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2 \right\} \quad (2.3)$$

Untuk mendapatkan nilai dari para meter μ dan σ digunakan metode MLE, dengan fungsi likelihood nya adalah:

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x_i - \mu)^2 \right\}$$

tertentu, yang sebenarnya penting dalam

membandingkan return. Rumusan return sederhana sulit ditangani karena tidak memenuhi sifat aditif, yaitu

compound return sederhana tidak dapat dinyatakan sebagai penjumlahan dari return hariannya, namun

perkalian dari return seharianya. Sebagai alternatifnya digunakan return majemuk[8].

Return majemuk pada waktu $(t - 1)$ ke t

dinyatakan sebagai:

$$R_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right).$$

Misalkan P_t menyatakan harga aset pada waktu t dan R_t menyatakan return majemuk aset pada waktu t . Bentuk umum dari return majemuk untuk t periode, yaitu

$$f(\mu, \sigma^2 | \mathbf{R}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (R_i - \mu)^2 \right\} \quad (2.4)$$

Dimana $\prod_{i=1}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (R_i - \mu)^2 \right\}$

... kemudian, fungsi log likelihood nya adalah:

$$\begin{aligned} \ell &= \log(f(\mu, \sigma^2 | \mathbf{R})) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \log(2\pi) + \log(\sigma^2) + \frac{(R_i - \mu)^2}{\sigma^2} \right\} \quad (2.5) \end{aligned}$$

Estimasi parameter μ dan σ^2 diperoleh dengan

memaksimumkan fungsi log likelihood dengan membuat nol turunan pertama fungsi log-likelihood terhadap parameter yang ingin ditaksir terhadap masing-masing parameter yang didefinisikan sebagai:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = 0$$

Dalam tugas akhir ini penaksiran parameter dari model *time series* akan dibahas di bab empat, dilakukan simulasi penaksiran parameter pada model GARCH(0,1) dan GARCH(0,2).

Volatilitas adalah suatu ukuran yang menunjukkan seberapa besar harga berfluktuasi dalam suatu periode waktu. Volatilitas dari pengembalian harga saham

mempresentasikan risiko pengembalian harga saham tersebut. Data *time series* pada analisis keuangan biasanya memiliki ragam pengembalian harga saham yang tidak konstan pada tiap titik waktunya[4]. Pengukuran volatilitas yang biasa digunakan adalah volatilitas konstan (*Constant Volatilitas*) dan volatilitas tidak konstan (*Non-Constant Volatilitas*). Volatilitas konstan terdiri dari standar deviasi, rata-rata bergerak sederhana, persentil method/*historical simulation* sedangkan volatilitas tidak konstan adalah Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) dan Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic (GARCH)[4].

Engle dan Patton (2001) mendefinisikan bahwa model volatilitas yang baik adalah model yang dapat mempengaruhi dan mengakomodasi sifat-sifat volatilitas dari sebuah return saham. Mulai dari pendekatan volatilitas konstan, menganggap bahwa harga aset dasar derivatif berikut basic model untuk gerak Brown Geometrik:[4].

GARCH ialah Sebuah istilah yang diciptakan oleh ekonom Robert Engle pada tahun 1982 untuk menggambarkan kompleks perhitungan yang digunakan untuk memperkirakan harga fluktuasi pasar keuangan dan untuk memprediksi inflasi[7]. Proses ini melibatkan membandingkan satu set variabel untuk mereka sendiri perilaku masa lalu

melalui serangkaian waktu interval untuk mengidentifikasi korelasi dan hasil yang tak terduga[6].

Rumus peramalan berasal di bagian acara sebelumnya baik kekuatan dan kelemahan dari model sebelumnya, sebagai peramalan varians bersyarat masa depan hanya melibatkan kembalinya kuadrat terbaru. Dalam prakteknya, satu mungkin berharap bahwa akurasi peramalan dapat meningkatkan oleh termasuk semua kembali kuadrat masa lalu dengan bobot nilai yang rendah untuk volatilitas yang lebih jauh. Satu pendekatan adalah untuk menyertakan lebih tertinggal kembali kuadrat di model. The ARCH (q) model, yang diusulkan oleh Engle (1982) [7].

Di sini, q disebut sebagai urutan ARCH. Pendekatan lain, yang diusulkan oleh Bollerslev (1986) dan Taylor (1986), memperkenalkan p tertinggal dari varians bersyarat dalam model, di mana p disebut sebagai urutan GARCH[8]. Model gabungan disebut

menjadi negatif dapat meningkatkan pola dinamis yang dapat ditangkap oleh model GARCH[6].
 stasi Proses (0) adalah GARCH(p,q). jika proses proses (0) r, berikut persamaan umum GARCH(p,q):

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2.6)$$

Pada persamaan (2.6) adalah bentuk umum model GARCH(p,q), karena dalam pengerjaan Tugas Akhir ini menggunakan Model GARCH dengan ordo (0,1) dan ordo (0,2) dimana ordo p = 0 (α = 0 maka nilai dari α = 0, jadi sama jika tidak ditulis di model), berikut adalah persamaan model GARCH (0,1). Definisi model GARCH (0,1), dapat dilihat sebagai berikut:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 \quad (2.7)$$

Dengan $\omega < 0$ dan $\alpha_1 \geq 0$
 Asumsi:

1. $\epsilon_t \sim N(0,1)$, ϵ_t merupakan pengubah acak saling bebas dan berdistribusi normal
2. ϵ_t dan ϵ_{t-1} saling bebas
3. ϵ_{t-1} dengan ϵ_t saling bebas
4. ϵ_t tidak saling bebas dengan ϵ_{t-1}

Dengan asumsi-asumsi diatas, dapat diketahui mengenai kestasioneran lemah dari model GARCH (0,1). Perlu diketahui fungsi distribusi ϵ_t dan ϵ_{t-1} . Dengan melihat pada sifat distribusi pada GARCH(0,1), didapat $\epsilon_t \sim N(0,1)$ dan $\epsilon_{t-1} \sim N(0,1)$.

Definisi model GARCH (0,2), dapat dilihat sebagai berikut:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2 \quad (2.8)$$

umum autoregressive heteroskedastisitas bersyarat atau model GARCH (p, q). Karena varians bersyarat harus positif, koefisien dalam GARCH sebuah Model sering terkendala untuk menjadi negatif. Namun, parameter non negative kendala tidak diperlukan untuk model GARCH untuk memiliki varians bersyarat non negative

Dengan $\alpha_0 < 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$

Asumsi:

1. $\epsilon_t \sim N(0,1)$, ϵ_t merupakan pengubah acak saling bebas dan berdistribusi normal
2. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ saling bebas
3. ϵ_{t-1} dengan ϵ_t saling bebas
4. ϵ_t tidak saling bebas dengan ϵ_{t-1} dan ϵ_{t-2}

Dengan asumsi-asumsi diatas, dapat diketahui mengenai kestasioneran lemah dari model GARCH (0,2). Perlu

dengan probabilitas 1, melihat Nelson dan Cao (1992) dan Tsai dan Chan (2006). Membiarkan nilai parameter

diketahui fungsi distribusi ϵ_t dan $\epsilon_t | \epsilon_{t-1}$. Dengan melihat pada sifat distribusi pada GARCH(0,2), didapat $\epsilon_t \sim N(0,1)$ dan $\epsilon_t | \epsilon_{t-1} \sim N(0,1)$.

RMSE adalah standar deviasi dari residual, residual adalah ukuran selisih antara nilai duga (*predicted value*) dengan nilai pengamatan. RMSE juga sering digunakan untuk mengukur tingkat keakuratan sebuah model dengan *climatology, forecasting, dan regression analysis* untuk menverifikasi dari hasil eksperimen[10]. Ini bentuk umum dari RMSE:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (C_t - \hat{C}_t)^2} \tag{2.9}$$

Ketika pengamatan standar dan nilai prediksi yang digunakan sebagai masukan untuk menghitung RMSE, ada hubungan langsung dengan koefisien korelasi. Sebagai contoh, jika koefisien korelasi=1, RMSE=0 karena semua titik terletak pada garis regresi(dan oleh karena itu tidak ada kesalahan)[10].

Mean Absolute Error(MAE) adalah kuantitas yang digunakan untuk mengukur seberapa perkiraan atau prediksi sebuah nilai agar mendekati dengan nilai yang sebenarnya. Bentuk umum dari MAE:

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \hat{x}_i| \quad (2.10)$$

MAE menggunakan skala yang sama dengan data yang diukur. Hal ini dikenal sebagai ukuran akurasi skala, yang dimana \hat{x}_i adalah nilai prediksi dan x_i adalah return data asli[10].

Kestasioneran adalah suatu keadaan yang fluktuasi datanya berada di sekitar suatu nilai rata – rata yang konstan (tidak bergantung pada waktu) dan variansi (sebaran) dari fluktuasinya konstan. Stasioneritas suatu data penting dalam menganalisis data yang berbentuk model *time series* , untuk menentukan model *time series* diperlukan ketepatan dalam menentukan parameter yang sesuai dengan kenyataan. Jika hasil simulasi kestasioneranya berfluktuasi dalam satu sumbu (mendatar terhadap sumbu x (waktu)) yakni tidak terdapat trend naik atau trend turun, menandakan bahwa ekspektasi (mean) dari data tersebut konstan. Sedangkan sebaran fluktuasinya merepresentasikan variansi dari data tersebut. Ada dua jenis proses stasioner yang sering digunakan yaitu:

Misalkan $\{x_t\}$ pengubah acak dikatakan stasioner kuat apabila F sebagai fungsi distribusi gabungan x_1, x_2, \dots, x_n sama dengan distribusi gabungan dari $x_{1+k}, x_{2+k}, \dots, x_{n+k}$ untuk semua titik waktu t_1, t_2, \dots, t_n dan semua pilihan *time lag* k. Dituliskan sebagai:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_{1+k}, x_{2+k}, \dots, x_{n+k})$$

Untuk semua nilai n dan k bilangan bulat. Misalkan $\{x_t\}$ dikatakan stasioner lemah jika nilai rata-rata(mean) dan kovarians antara x_t dan x_{t+k} konstan pada setiap waktu. Proses stasioner lemah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(x_t) &= \mu \\ \text{Cov}(x_t, x_{t+k}) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Nilai kovariansinya hanya bergantung pada lag k dan tidak bergantung pada waktu, ditulis sebagai berikut:

$$\text{Cov}(x_t, x_{t+k}) = \text{Cov}(x_{t-1}, x_{t-1+k}) = \text{Cov}(x_{t-2}, x_{t-2+k}) = \dots$$

3. PERANCANGAN SISTEM

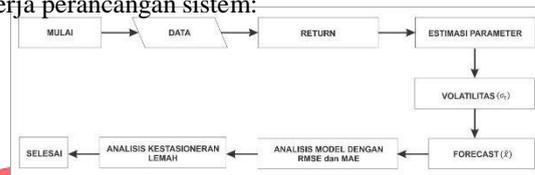
Pada tugas akhir ini dibuat sebuah sistem prediksi return dengan menggunakan Volatilitas harga saham, yang akan dihitung dari perbandingan Model GARCH (0,1) dengan model GARCH (0,2). Sistem prediksi ini dibangun menggunakan data saham yang di ubah menjadi return. Jadi yang dihitung dan diprediksinya adalah harga return nya.

Sistem prediksi yang dibangun secara umum terbagi dalam 4 tahap proses utama. Tahap pertama adalah

mengubah data saham menjadi return. Tahap kedua adalah penaksiran parameter dengan menggunakan estimasi likelihood. Tahap ketiga adalah tahap memprediksi return yang sudah didapat variansi dan volatilitas dengan menggunakan model GARCH (0,1) dan GARCH (0,2) untuk diprediksi. Terakhir adalah analisis perbandingan dari hasil perhitungan kedua model dan menganalisis

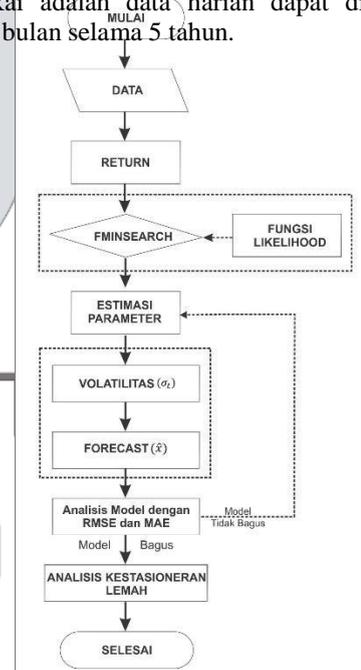
Diagram alur proses prediksi volatilitas dengan menggunakan GARCH (0,1) dan GARCH (0,2) apakah mengakomodir sifat kestasioneran. Berikut adalah alur

kerja perancangan sistem:



Gambar Error! No text of specified style in document..1

Diagram perancangan sistem prediksi Model GARCH Data yang digunakan diambil dari situs www.idx.co.id. Data yang digunakan yaitu data close pada harga saham yang diubah menjadi return. Data yang dipakai adalah data harian dapat dilihat dari historis per bulan selama 5 tahun.

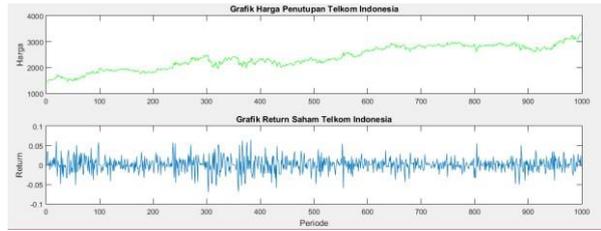


Gambar 3.2 Diagram alur sistem prediksi model GARCH

4. IMPLEMENTASI SISTEM, PENGUJIAN DAN ANALISIS HASIL

Pada bab sebelumnya telah dibahas perancangan sistem dan statistika deskriptif data, maka pada bab ini akan dilakukan pencarian nilai return, kesetasioneran, pencarian parameter pada masing-masing model menggunakan metode Maksimum Likelihood, menentukan model prediksi dari masing-masing model GARCH (0,1) dan GARCH (0,2).

Analisis Data



Gambar Error! No text of specified style in document..3 Harga Saham dan Return Telkom Indonesia

Gambar 4.1 menunjukkan grafik harga saham pada

PT. Telkom Indonesia pada periode 30 April 2012 - 29

Februari 2016 dan grafik *return* majemuk diambil dari data *close price* Telkom Indonesia. Pada gambar tersebut dapat dilihat bahwa *return* mengalami

peningkatan secara periodik hanya beberapa kali mengalami penurunan namun tidak signifikan.

GARCH (0,1)

Sifat Distribusi Model GARCH (0,1)

Ekspektasi Bersyarat/*Mean*

$$E(r_t | r_{t-1}) = E(r_t | r_{t-1})$$

$$= E(r_t | r_{t-1}) \cdot E(r_t | r_{t-1})$$

$$= \sigma^2 (\sqrt{\omega + \alpha_1 r_{t-1}^2} | r_{t-1}) \cdot E(r_t | r_{t-1})$$

$$= \sigma^2 (\sqrt{\omega + \alpha_1 r_{t-1}^2} | r_{t-1}) \cdot 0$$

$$= 0$$

Variansi Bersyarat

$$Var(r_t | r_{t-1}) = Var(r_t | r_{t-1})$$

$$= - \sum_{t=1}^n (\log(2\sigma^2) + \log(\sigma^2 + \alpha_1 r_{t-1}^2) + \frac{r_t^2}{2(\sigma^2 + \alpha_1 r_{t-1}^2)}) \quad (4.2)$$

Estimasi parameter ω, α_1 diperoleh dengan memaksimalkan fungsi log likelihood dengan membuat nol turunan pertama fungsi log-likelihood terhadap parameter yang ingin ditaksir terhadap masing-masing parameter yang didefinisikan sebagai:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \omega} = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial \alpha_1} = 0.$$

Turunan pertama fungsi log likelihood terhadap ω adalah:

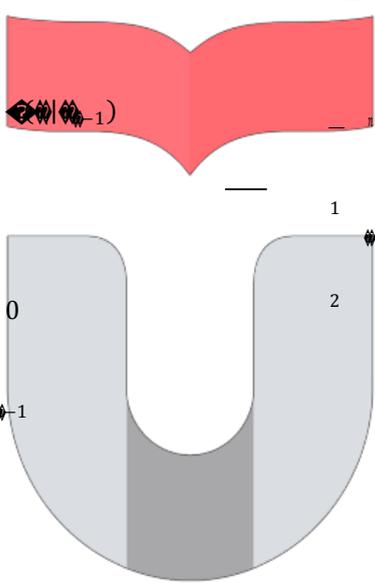
$$\frac{\partial \ell}{\partial \omega} = - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{\sigma^2 + \alpha_1 r_{t-1}^2} - \frac{r_t^2}{(\sigma^2 + \alpha_1 r_{t-1}^2)^2} \right)$$

$$= - \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{\sigma^2 + \alpha_1 r_{t-1}^2} - \frac{r_t^2}{(\sigma^2 + \alpha_1 r_{t-1}^2)^2} \right) \quad (4.3)$$

Turunan pertama terhadap α_1 adalah:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha_1} = - \sum_{t=1}^n \left(\frac{r_{t-1}^2}{\sigma^2 + \alpha_1 r_{t-1}^2} - \frac{r_t^2 r_{t-1}^2}{(\sigma^2 + \alpha_1 r_{t-1}^2)^2} \right)$$

$$= - \sum_{t=1}^n \left(\frac{r_{t-1}^2}{\sigma^2 + \alpha_1 r_{t-1}^2} - \frac{r_t^2 r_{t-1}^2}{(\sigma^2 + \alpha_1 r_{t-1}^2)^2} \right) \quad (4.4)$$



$$\begin{aligned}
 &= \omega_0 + \omega_1 x^2 + \omega_2 \\
 &= \omega_1^2 + 1 \\
 &= \omega_1^2
 \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan ekspektasi dan variansi bersyarat, model GARCH(0,1). Dengan $\epsilon_t \sim N(0,1)$, maka $\epsilon_t^2 = \omega_0 + \omega_1 \epsilon_{t-1}^2$, fungsi peluang dari model GARCH(0,1):

$$f(\epsilon_{t-1} | \epsilon_{t-1}^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\omega_0 + \omega_1 \epsilon_{t-1}^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(\omega_0 + \omega_1 \epsilon_{t-1}^2)}\right) \quad (4.1)$$

$$\sqrt{2\pi(\omega_0 + \omega_1 \epsilon_{t-1}^2)} \quad 2\omega_0 + \omega_1 \epsilon_{t-1}^2$$

Untuk mendapatkan nilai penaksir dari parameter ω_0, ω_1 , digunakan metode Maksimum Likelihood, dengan fungsi likelihoodnya adalah:

$$L(\omega_0, \omega_1) = \prod_{t=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(\omega_0 + \omega_1 \epsilon_{t-1}^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(\omega_0 + \omega_1 \epsilon_{t-1}^2)}\right)$$

Sedangkan fungsi log likelihoodnya adalah:

$$l = \log(L(\omega_0, \omega_1))$$

Persamaan yang didapat dari turunan pertama masing-masing parameter tidak dapat dilakukan penyelesaian sederhana, oleh karena itu digunakan fungsi dari software matlab sehingga didapat nilai parameter yang dibutuhkan model GARCH (0,1).

Dari metode Maksimum Likelihood diperoleh nilai parameter $\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1$. Berikut parameter yang dihasilkan:

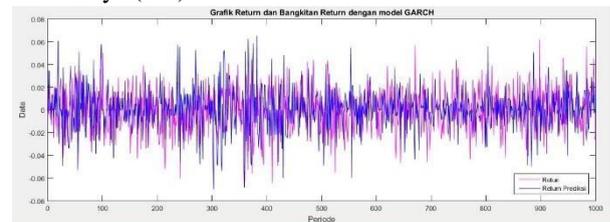
Table Error! No text of specified style in document.-1
Parameter GARCH (0,1)

$\hat{\omega}_0$	$\hat{\omega}_1$
0.00025	0.22501

Setelah diperoleh nilai parameter, maka akan dilakukan pencarian nilai return prediksi dari data training menggunakan model GARCH (0,1) dengan parameter yang telah diperoleh. Berikut definisi modelnya:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_t^2 &= \omega_0 + \omega_1 \epsilon_{t-1}^2 \\
 \epsilon_t^2 &= \omega_0 + \omega_1 \epsilon_{t-1}^2 \\
 &= 2.50629 * 10^{-4} + 0.225005(\epsilon_{t-1}^2) \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (4.5), diperoleh nilai return prediksi dari nilai model GARCH(0,1). Berikut adalah plot grafik return training dengan return prediksi model GARCH (0,1) untuk mendapat prediksi periode berikutnya (t+1):



Gambar Error! No text of specified style in document..4 Grafik Return Training dengan Return Prediksi Model GARCH (0,1)

$$= \frac{\dots}{1 - (\dots)}$$

Dengan menggunakan teorema “apabila ekspektasi dari jumlahan tak hingga dari variable acak tak negative terbatas pada suatu nilai, maka jumlahan nilai acak juga konvergen ke nilai tersebut” didapat bahwa nilai σ^2_t akan konvergen menuju $\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$. Karena σ^2 haruslah non

negative, maka nilai $0 \leq \alpha_1 < 1$. Oleh karena itu, didapatkan batas nilai parameter α_0 dan α_1 agar model GARCH (0,1) stasioner yaitu $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0$, dan $0 \leq \alpha_1 < 1$.

$$1 - (\dots) \quad 1 - 0,2$$

Gambar 4.7 Simulasi Kestasioneran lemah GARCH (0,1) dengan $\alpha_0 = -0,8, \alpha_1 = 1,5$ dan $n = 1000$

Berdasarkan pada gambar 4.5 dari proses simulasi GARCH(0,1) dapat diambil kesimpulan bahwa apabila parameter $\alpha_0 = 0,8, \alpha_1 = 1,5$ akan terjadinya divergen menyebabkan model tidak stasioner. Dapat disimpulkan bahwa kestasioneran model GARCH(0,1) tersebut dapat dipenuhi dengan syarat kestasioneran $\alpha_0 > 0$ dan $0 \leq \alpha_1 \leq 1$.

GARCH (0,2)
Sifat Distribusi Model GARCH (0,2)

Ekspektasi/Mean

$$\begin{aligned}
 E(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) &= E(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) \\
 &= \frac{E(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) \cdot E(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})}{2} \\
 &= \frac{E(\sqrt{\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2} | \mathcal{F}_{t-1}) \cdot E(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})}{2} \\
 &= \frac{E(\sqrt{\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2} | \mathcal{F}_{t-1}) \cdot 0}{2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Variansi

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) &= \text{Var}(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) \\
 &= \frac{\text{Var}(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) \cdot \text{Var}(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})}{2} \\
 &= \frac{\text{Var}(\sqrt{\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2} | \mathcal{F}_{t-1}) \cdot \text{Var}(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 1 \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{(\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2)}{(\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2)^2} \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left(\frac{\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2}{(\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2)^2} \right) \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Turunan pertama terhadap ω , adalah:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ell}{\partial \omega} &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{1}{(\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2)} \\
 &= -\sum_{t=1}^n \frac{1}{2(\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2)} \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{(\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2)}{(\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2)^2} \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left(\frac{\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2}{(\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2)^2} \right)
 \end{aligned}$$

Turunan pertama terhadap α_1 , adalah:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ell}{\partial \alpha_1} &= -\sum_{t=1}^n \frac{1}{2(\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2)} \\
 &= -\sum_{t=1}^n \frac{1}{2(\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2)} \\
 &= -\sum_{t=1}^n \frac{1}{2(\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2)} \\
 &= -\sum_{t=1}^n \frac{1}{2(\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2)}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan ekspektasi dan variansi

bersyarat model GARCH (0,2), dengan $\epsilon_t \sim N(0,1)$,

Maka $\epsilon_t | \epsilon_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$, fungsi peluang dari model GARCH (0,2):

$$f(\epsilon_t | \epsilon_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \epsilon_{t-1}^2 + \sigma_2^2 \epsilon_{t-2}^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \epsilon_{t-1}^2 + \sigma_2^2 \epsilon_{t-2}^2)}\right)$$

Untuk mendapatkan nilai penafsiran dari parameter $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ digunakan metode Maksimum Likelihood (MLE), dengan fungsi likelihood:

$$L(\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2 | \epsilon_{t-1}) = \prod_{t=3}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \epsilon_{t-1}^2 + \sigma_2^2 \epsilon_{t-2}^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \epsilon_{t-1}^2 + \sigma_2^2 \epsilon_{t-2}^2)}\right)$$

Fungsi log likelihood:

$$\ell = \log(L(\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2 | \epsilon_{t-1})) = \frac{1}{n} \sum_{t=3}^n \left(\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \epsilon_{t-1}^2 + \sigma_2^2 \epsilon_{t-2}^2)}}\right) + \log\left(\exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \epsilon_{t-1}^2 + \sigma_2^2 \epsilon_{t-2}^2)}\right)\right) \right) \quad (4.9)$$

Estimasi parameter $\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2$ diperoleh dengan

memaksimumkan fungsi log likelihood dengan membuat nol turunan pertama fungsi log-likelihood terhadap parameter yang ingin ditaksir terhadap masing-masing parameter yang didefinisikan sebagai:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_0^2} = -\sum_{t=3}^n \left(\frac{1}{2(\sigma_0^2 + \sigma_1^2 \epsilon_{t-1}^2 + \sigma_2^2 \epsilon_{t-2}^2)} \right) \quad (4.12)$$

Dari metode Maksimum Likelihood diperoleh nilai parameter $\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2$. Berikut parameter yang

dihasilkan:

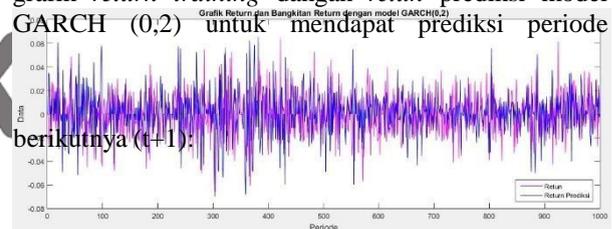
Table 4-2 Parameter GARCH (0,2)

$\hat{\sigma}_0^2$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$
0.000204	0.236282	0.144209

Setelah diperoleh nilai parameter, maka akan dilakukan pencarian nilai *return* prediksi dari data training menggunakan model GARCH (0,1) dengan parameter yang telah diperoleh. Berikut definisi modelnya:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \sigma_0^2 + \sigma_1^2 \epsilon_{t-1}^2 + \sigma_2^2 \epsilon_{t-2}^2 \\ &= 2.04689 * 10^{-4} + 0.23628(\epsilon_{t-1}^2) + 0.144209(\epsilon_{t-2}^2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dari persamaan (4.13), diperoleh nilai *return* prediksi dari nilai model GARCH(0,2). Berikut adalah plot grafik *return training* dengan *return* prediksi model GARCH (0,2) untuk mendapat prediksi periode berikutnya (t+1):



Gambar 4.8 Grafik Return Training dengan Return Prediksi Model GARCH (0,2)

$$\frac{\partial \ell}{\partial \omega} = 0, \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial \ell}{\partial \beta} = 0$$

Turunan pertama fungsi log likelihood terhadap ω adalah:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \omega} = -\frac{1}{2} \sum_{i=3}^n \left(\omega + \frac{1}{\omega} \epsilon_{i-1}^2 + \frac{1}{\omega} \epsilon_{i-2}^2 \right)$$

$$= -\left(\omega + \frac{1}{\omega} \epsilon_{i-1}^2 + \frac{1}{\omega} \epsilon_{i-2}^2 \right)$$

Selain didapat prediksi nilai *return*, volatilitas dari model GARCH (0,2) juga dilakukan analisis, apakah

model GARCH (0,2) sudah memenuhi kestasioneran atau tidak.

Sifat kestasioneran ini dapat dilihat dari nilai ekspektasi

dan variansinya yang konstan terhadap waktu. Diketahui bahwa:

$$E(\epsilon_{i-1}^2) = 0$$

$$V(\epsilon_{i-1}^2) = \omega + \frac{1}{\omega} \epsilon_{i-1}^2 + \frac{1}{\omega} \epsilon_{i-2}^2 \quad (4.19)$$

Persamaan (4.19) menunjukkan nilai variansi bersyarat ϵ_{i-1}^2 bergantung terhadap nilai parameternya

$$\begin{aligned}
 &= \omega_0 + \omega_1 \sum_{i=1}^{\infty} (\omega_2)^{i-1} + (\omega_2)^i \\
 &\quad \vdots \\
 &= \frac{\omega_1}{1 - (\omega_1 + \omega_2)} \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan teorema “apabila ekspektasi dari jumlahan tak hingga dari variable acak tak negative terbatas pada suatu nilai, maka jumlahan nilai acak juga konvergen ke nilai tersebut” didapat

bahwa nilai σ^2 akan konvergen menuju $\frac{\omega_0}{1 - (\omega_1 + \omega_2)}$.

2

Karena ω_1 haruslah non negative, maka nilai $0 \leq \omega_1 < 1$

1. Oleh karena itu, didapatkan batas nilai parameter ω_0 dan ω_1 agar model GARCH (0,2) stasioner yaitu $\omega_0 > 0, \omega_1 \geq 0, \omega_2 \geq 0$ dan $0 \leq \omega_1 + \omega_2 < 1$.

Pada simulasi ini, dibangkitkan data dengan nilai parameter $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ melihat proses kestasioneran yang

Gambar 4.11 Simulasi Kestasioneran lemah GARCH (0,2) dengan $\omega_0 = -0,8, \omega_1 = 1,2, \omega_2 = 1,4$ dan $n = 1000$

GARCH(0,2) dapat diambil kesimpulan bahwa apabila parameter $\omega_0 = 0,1, \omega_1 = 1,2$ dan $\omega_2 = 1,4$ akan terjadinya divergen menyebabkan model tidak stasioner.

Dapat disimpulkan bahwa kestasioneran model

GARCH(0,2) tersebut dipenuhi dengan syarat

kestasioneran $0 \leq \omega_1 + \omega_2 < 1$.

Validasi model digunakan untuk memilih model yang terbaik dengan melihat residual atau *error* masing-masing model yang telah diuji. Semakin kecil residual atau *error*, semakin baik pula model tersebut sehingga

dapat digunakan untuk memprediksi t atau periode berikutnya.

Table 4-3 Hasil Validasi dari Model GARCH (0,1) dan GARCH (0,2)

Model	RMSE	MAE
GARCH (0,1)	0.00257	0.00014
GARCH (0,2)	0.00354	0.00024

Menurut Tabel 4.3, *return* harga saham Telkom Indonesia sedikit lebih akurat apabila diprediksi dengan model GARCH (0,1) dibandingkan dengan model GARCH (0,2). Hal tersebut dapat dilihat dari lebih rendahnya nilai-nilai *Root Mean Square Error* (RMSE) dan *Mean Absolute Error* (MAE) dari GARCH (0,1) dibandingkan dengan GARCH (0,2). Sedikit perbedaan nilai validasi menggunakan RMSE dan MAE antara model GARCH (0,1) dan model GARCH (0,2) ini dimungkinkan karena data periode 1 Mei 2012-29 Februari 2016 tidak memiliki fluktuasi yang ekstrem atau tidak terdapat perbedaan harga saham yang signifikan.

5. PENUTUP

Berdasarkan hasil pengujian, kesimpulan yang didapatkan sebagai berikut:

1. Hasil dari simulasi kedua model menunjukkan nilai taksiran parameter memiliki perilaku yang berbeda-beda terhadap RMSE dan MSE. Dimana tingkat keakuratan model GARCH (0,1) sebesar 0.00257 saat dihitung dengan RMSE dan 0.00014 dihitung dengan MAE. Tingkat keakuratan model GARCH (0,2) sebesar 0.00354 dihitung dengan RMSE dan 0.00024 dihitung dengan MAE. Jika dilihat dari hasil prediksi membuktikan bahwa dengan model GARCH (0,1) sedikit lebih akurat dibandingkan dengan model GARCH (0,2).
2. Data *return* saham yang digunakan pada Tugas Akhir ini adalah data yang dibangkitkan dengan model GARCH (0,1) dan GARCH (0,2). Model GARCH(0,1) memenuhi sifat kestasioneran lemah dengan nilai parameter $0 < \alpha_1 < 1$ dan model GARCH (0,2) memenuhi stasioner lemah dengan nilai parameter $0 < \alpha_1 + \alpha_2 < 1$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Brandt, Micheal W. 2006. *Volatility Forecasting With Range-Based EGARCH Models*. Marshall School of Business, University of Southern California, Los Angeles, USA.
- [2] Ramadhan, Bayu Ariesty. 2014. *Analisis Perbandingan Metode Arima Dan Metode Garch Untuk Memprediksi Harga Saham*. Fakultas Ekonomi dan Bisnis, Universitas Telkom, Bandung.
- [3] https://id.wikipedia.org/wiki/Bukti_empiris (pukul 02.27 WIB, 7 November 2015)

- [4] Gatheral, Jim. Lynch, Merrill. 2002. *Stochastic Volatility and Local Volatility*. Courant Institute of Mathematical Sciences, Fall Term.
- [5] J.McNeil, Alexander. Frey, Rudiger Frey. Embrechts, Paul. 2005. *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press, New Jersey (p. 116-182)
- [6] D.Cryer, Jonathan. Sik Chan, Kung. 2008. *Time series Analysis*. Department of Statistics & Actual Science, University of Iowa, Iowa, USA.
- [7] Bollerslev, Tim. 1986. *Generalized Autoregressive conditional Heteroskedasticity*. University of California, San Diego, USA.
- [8] Tsay, Ruey S. 2005. *Analysis of Financial Time series*. Graduate School of Business, University of Chicago, USA.
- [9] Marianik. 2014. *Kebergantungan Dua Proses Heteroskedastik Berbasis Copula*. Institut Teknologi Bandung, Bandung, Indonesia.
- [10] Chai, T. Draxler, R R. 2014. *Root mean square error (RMSE) or Mean absolute error(MAE)? Arguments Against Avoiding RMSE in the Literature*. University Research Court, Clollege Park. USA.