

Value-at-Risk Pada Portofolio Berbasis Model Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastik dan Copula

June 29, 2016

Abstrak

Pengukuran risiko merupakan hal penting bagi individu maupun perusahaan dalam pengambilan suatu keputusan guna menghindari besar kecilnya risiko yang mungkin terjadi. Ada beberapa cara dalam menghitung risiko pada portofolio, salah satunya adalah VaR pada tingkat kepercayaan $(1 - \alpha)$. Namun, risiko memiliki peluang sebesar α untuk terjadi di atas VaR. Expected Shortfall merupakan ukuran risiko yang koheren, memiliki rentang yang dapat digunakan sebagai alternatif dalam menghitung estimasi risiko untuk menghindari tingkat kerugian yang melebihi VaR. Portofolio dari beberapa aset, untuk menentukan nilai risiko pada portofolio memerlukan informasi distribusi marginal masing-masing aset dan fungsi distribusi gabungan. Pendekatan fungsi distribusi gabungan dengan copula mempertimbangkan tingkat kebergantungan aset satu dengan lainnya, diukur menggunakan Kendall's Tau. Pada Tugas Akhir ini estimasi Expected Shortfall dengan menggunakan copula Archimedean, secara khusus copula Clayton dan Gumbel. Copula Gumbel adalah alternatif yang lebih baik dalam menentukan Expected Shortfall portofolio dengan nilai 0.0160 pada tingkat kepercayaan 90%, nilai pada tingkat kepercayaan 95% yaitu 0.0214 dan nilai dengan tingkat kepercayaan 99% sebesar 0.0329 pada periode ke-998.

Kata kunci: Portofolio, Kendall's Tau, VaR, Expected Shortfall, Copula Archimedean

1 Pendahuluan

Risiko merupakan bagian yang penting bagi sebuah manajemen keuangan untuk perencanaan di masa yang akan datang. Nilai masing-masing aset dalam portofolio tergantung pada seperangkat nilai-nilai ekonomi yang disebut faktor risiko. Faktor risiko ini tentu mempengaruhi aset individu, dan nantinya akan mempengaruhi seluruh aset pada portofolio. Namun, bagi seorang investor investasi pada sebuah saham memberikan keuntungan yang sangat besar dan cepat dengan risiko yang sebanding pula. Mengetahui tingkat risiko sebelum berinvestasi dilakukan untuk menghindari kemungkinan terburuk yang terjadi pada investasi.

Menentukan ukuran risiko suatu portofolio perlu mempertimbangkan tingkat kebergantungan aset satu dengan yang lainnya. Risiko pada portofolio dapat diukur dan dimodelkan dengan cara yang berbeda. Namun sering kali suatu metode menggunakan distribusi sederhana seperti berdistribusi normal, akan tetapi sering asumsi yang sederhana tidak sesuai dengan prakteknya, karena distribusi marginal yang mendasari kemungkinan tidak simetri atau normal. Oleh karena itu, uku-

ran risiko diprediksi dengan melibatkan fungsi distribusi bersama dan nilai kebergantungan dari aset-aset penyusun portofolio. Untuk menghindari kesalahan tersebut maka digunakan fungsi copula untuk memperoleh distribusi gabungan dengan melibatkan kebergantungan pada distribusi-distribusi marginal yang tidak normal.

Pada umumnya menghitung nilai risiko pada sebuah aset portofolio menggunakan Value-at-Risk (VaR). Namun, ada kalanya risiko melebihi VaR itu sendiri, seperti kita ketahui untuk setiap perhitungan VaR diberikan tingkat kepercayaan sebesar $1 - \alpha$. Hal tersebut mengidentifikasi ada kemungkinan risiko bisa melebihi VaR sebesar α . Oleh karena itu, pada Tugas Akhir ini memprediksi nilai risiko menggunakan Expected Shortfall (ES). Selain itu, Expected Shortfall merupakan ukuran risiko yang koheren [1]. Berdasarkan hal tersebut, maka dibangunlah suatu model menggunakan fungsi distribusi gabungan keluarga copula Archimedean, yaitu copula Clayton dan Gumbel dalam menentukan Expected Shortfall.

1.1 Return

Return adalah pengembalian yang diperoleh perusahaan, individu dan institusi dari hasil kebijakan investasi yang dilakukan. Return bisa memiliki nilai positif yang disebut capital gain dan bisa juga bernilai negatif disebut capital loss. Return saham dibedakan menjadi dua yaitu return realisasi dan return ekspektasi (expected return). Return ekspektasi merupakan return harapan di masa yang akan datang, namun sifatnya masih belum pasti.

$$R_t = 100 * \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

dimana P_t adalah harga saham hari ini dan P_{t-1} harga saham kemarin. Kemudian R_t adalah nilai return yang didapatkan setelah diubah dalam logaritma normal.

1.2 Ukuran Asosiasi

1.2.1 Kendall's Tau

Menurut Nelsen, R.B. (1991), koefisien korelasi Kendall's Tau pertama kali diperkenalkan oleh Fechner sekitar tahun 1900, dan ditemukan kembali oleh Kendall (1938) [2]. Kendall's Tau merupakan normalisasi nilai harapan dan memberikan metode alternatif untuk menghitung ukuran asosiasi pada Copula. Misalkan diberikan ${}_n C_2$ pasangan obsevasi data sampel (x_i, y_i) dan (x_j, y_j) yang berbeda, langkah yang pertama dilakukan untuk mencari ranking dalam Kendall's Tau yaitu menentukan banyaknya pasangan data yang concordant dinyatakan dengan c dan banyaknya pasangan data yang discordant dinyatakan dengan d. Kedall's Tau yang untuk sampel dinyatakan dengan :

$$\tau = \frac{c-d}{n C_2} \tag{1}$$

dengan $(x_i - x_j) (y_i - y_j) > 0$ merupakan concordant dan $(x_i - x_j) (y_i - y_j) \leq 0$ merupakan discordant

1.3 Metode Anderson-Darling

Ada beberapa cara untuk menguji kecocokan fungsi distribusi maginal suatu data, salah satu

nya dengan Metode Anderson-Darling. Metode Anderson-Darling merupakan modifikasi dari uji

Kolmogorv-Smirnov (KS). Nilai-nilai kritis dalam uji KS tidak tergantung pada distribusi tertentu yang sedang diuji sedangkan uji Anderson-Darling memanfaatkan distribusi tertentu dalam

nilai ekstrim tipe I, dan distribusi logistik [3]. Misalkan x_1, x_2, \dots, x_n adalah data yang akan diuji distribusi normalnya dengan tingkat signifikan α maka uji Anderson-Darling dapat diperoleh dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$A = -n - S \tag{2}$$

dengan

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [2i - 1][\ln(F(Z_i)) + \ln(1 - F(Z_{n+1-i}))] \tag{3}$$

sehingga

$$A = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [2i - 1][\ln(F(Z_i)) + \ln(1 - F(Z_{n+1-i}))] \tag{4}$$

dimana n adalah ukuran sampel dan $F(Z_i)$ merupakan CDF distribusi yang ingin diuji.

1.4 Metode Copula

Copula fungsi multivariat yang dibentuk dari distribusi gabungan yang dapat digunakan untuk menganalisis kebergantungan variabel-variabel acak dalam struktu yang digambarkan oleh distribusi gabungan tersebut. Shingga Copula dari distribusi mutivariat dapat dipandang sebagai gambaran struktur kebergantungan dari distribusi multivariat tersebut berdasarkan perilaku dari masing-masing fungsi marginalnya.

1.4.1 Teori Sklar

Teori Sklar menjadi dasar berkembangnya Copula saat ini [10]. Teori Sklar memiliki hubungan antara

fungsi distribusi bivariat dan fungsi distribusi univariat, maka hubungan antara keduanya adalah,

$$H_{X,Y} = C(F_X(x), G_Y(y)) = C(u, v)$$

Menurut hubungan teori diatas dapat diturunkan terhadap fungsi peluang bivariat sebagai berikut:

$$h_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 H_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$= \frac{\partial^2 C(F_X(x), G_Y(y))}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 C(F_X(x), G_Y(y))}{\partial x \partial y}$$

menghitung nilai kritis. Ini memiliki keuntungan yang memungkinkan tes yang lebih sensitif, tetapi

kelemahannya adalah nilai-nilai kritis harus dihitung untuk setiap distribusi. Tabel nilai-nilai kritis untuk normal, lognormal, eksponensial, Weibull,

$$= f_X(x)g_Y(y) \partial F_X(x)\partial G_Y(y)$$

$$= f_X(x)g_Y(y)c(u, v)$$

Persamaan $c(u, v)$ menyatakan copula density.

1.4.2 Archimedean Copula

Copula Archimedean memiliki bentuk distribusi yang mempunyai persebaran ekor yang menunjukkan probabilitas kondisional daerah ekstrem. Copula Archimedean dapat didefinisikan sebagai berikut [4]:

$$C(u_1, \dots, u_d; \alpha) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1; \alpha) + \dots + \varphi(u_d; \alpha); \alpha) \quad (5)$$

dimana $\varphi(t)$ adalah fungsi generator. Untuk mengkonstruksi copula dengan metode Archimedean diperlukan fungsi generator $\varphi(t)$.

1.4.3 Copula Clayton

Keluarga Copula Clayton pertama kali diusulkan oleh Clayton [5], fungsi distribusi kumulatif Copula Clayton dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$C_{Clayton}(u, v; \omega) = (u^{-\omega} + v^{-\omega} - 1)^{\frac{1}{\omega}} \quad (6)$$

dimana $\omega \in [1, \infty)$

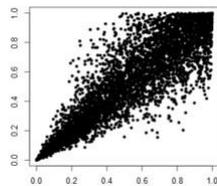


Figure 1: Persebaran ekor data Copula Clayton [10]

1.4.4 Copula Gumbel

Keluarga Copula Gumbel diperkenalkan oleh Gumbel [6]. Sejak dibahas dalam Hougaard [18], juga dikenal sebagai keluarga Gumbel-Hougaard. Fungsi distribusi kumulatif Copula Gumbel dapat didefinisikan sebagai berikut::

$$C_{Gumbel} = \exp -((-\log u)^\delta + (-\log v)^\delta)^{\frac{1}{\delta}} \quad (7)$$

dimana $\delta \in [0, \infty)$

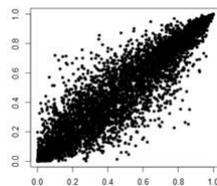


Figure 2: Persebaran ekor data Copula Gumbel[10]

1.5 Value-at-Risk(VaR)

Value at Risk (VaR) didefinisikan sebagai kerugian terbesar yang mungkin terjadi dan masih da-

waktu tertentu dengan suatu tingkat kepercayaan. Secara umum VaR digunakan untuk mengukur risiko pasar dan portofolio.

$$v_{1-\alpha}(Y) = F^{-1}(1 - \alpha)$$

dengan $v_{1-\alpha}$ adalah VaR pada tingkat kepercayaan $1 - \alpha$ dan F^{-1} merupakan invers dari fungsi distribusi F .

1.6 Violation Expected Shortfall

Sebelumnya sudah dibahas bahwa Expected Shortfall adalah ukuran risiko yang koheren. Namun masih ada kemungkinan risiko suatu aset melebihi Expected Shortfall yang sudah diperoleh, maka dari itu untuk mengetahui kualitas nilai Expected Shortfall dari suatu aset portofolio dapat diukur menggunakan Violation Expected Shortfall dengan cara mengumpulkan nilai-nilai risiko harian yang melebihi Expected Shortfall. Violation Expected Shortfall dapat di definisikan sebagai berikut [9]:

$$\eta_t = \begin{cases} 1 & z < -ESz \\ 0 & z > -ESz \end{cases} \quad (8)$$

dimana ES_z merupakan nilai Expepected Short-faal portofolio dan z return portofolio.

2 Perancangan Sistem

2.1 Analisis Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan indeks harian dari saham HONDA dan TOYOTA berdasarkan observasi tanggal 7 Oktober 2011 sampai 30 September 2015 dengan jumlah data sebanyak 1000 data. Seperti pada gambar 3.1 warna hijau menunjukkan pergerakan data saham HONDA dan garis warna biru pergerakan data UNSQX.

2.2 Statistika Deskriptif

Statistika deskriptif merupakan deskripsi umum yang menggambarkan keadaan data untuk saat ini. Dari statistik deskriptif kita dapat mengetahui beberapa informasi dari data yang ingin kita analisis, hasil dari statistik dekriptif saham yang digunakan:

Table 1: Hasil Statistika Deskriptif

Parameter	HONDA	TOYOTA
Min	-0.0849	-0.0476
Max	0.0704	0.0621
Mean	0.000003	0.000546
Skewness	-0.069	0.272

pat ditolerir pada suatu investasi dalam kurun

Kurtosis 2.326 1.355

Berdasarkan tabel 3.1 hasil statistik deskriptif menunjukkan nilai kurtosis untuk return saham HONDA sebesar 2.326 dan return saham TOYOTA sebesar 1.355, serta nilai skewness atau kemiringan return saham HONDA sebesar -0.069 dan return saham TOYOTA 0.272. Nilai-nilai tersebut menunjukkan kecenderungan data berada diluar distribusi normal, karena kurtosis tidak sama dengan tiga dan nilai skewness negatif yang berarti mempunyai ekor lebih tebal ke kiri dan positif lebih tebal ke kanan.

3.2 Model Copula

Berdasarkan hasil parameter Copula serta u dan v maka diperoleh masing-masing model copula Clayton dan Gumbel sebagai berikut.

$$C_{Clayton}(u, v; \omega) = (u^{-2.39} + v^{-2.39} - 1)^{\frac{1}{2.39}} \quad (9)$$

Persamaan di atas merupakan model copula Clayton dengan parameter copula yang sudah didapatkan serta u sebagai nilai cdf logistik return HONDA dan v sebagai nilai cdf logistik return TOYOTA.

$$C_{Gumbel}(u, v; \delta) = \exp -((-\log u)^{2.19} + (-\log v)^{2.19})^{\frac{1}{2.19}} \quad (10)$$

Persamaan di atas merupakan model copula Gumbel dengan parameter copula yang sudah didapatkan serta u adalah nilai cdf logistik return HONDA dan v adalah nilai cdf logistik return TOYOTA.

2.3 Alur Sistem Perancangan

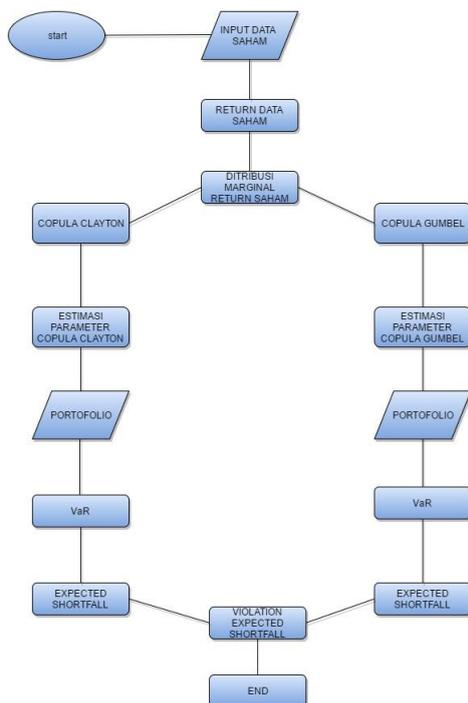


Figure 3: Rancangan Sistem

3 Implementasi Hasil

3.1 Uji Distribusi Marginal

Uji distribusi dilakukan dengan metode Anderson-Darling yang sudah dijelaskan. Uji dilakukan dengan dua taraf signifikan $\alpha = 0.01$ dan $\alpha = 0.05$ serta hipotesis sebagai berikut:
 H_0 : data berdistribusi logistik.
 H_1 : data tidak berdistribusi logistik.

Table 2: Nilai Anderson-Darling

Saham	NASDX	USNQX
Anderson Darling	0.50775	1.2952
Nilai tabel ($\alpha = 0.01$)	3.9074	3.9074
Nilai tabel ($\alpha = 0.05$)	2.5018	2.5018

4 Prediksi Expected Shortfall

Seperti yang sudah dibahas sebelumnya bahwa ES merupakan ukuran risiko yang paling koheren karena memenuhi seluruh aksioma ukuran risiko, khususnya subadditivity yang tidak dipenuhi oleh VaR namun sebelum mencari nilai prediksi ES perlu dicari terlebih dahulu nilai VaR karena nilai ES bergantung pada nilai VaR pada tingkat kepercayaan yang sama. Berikut merupakan hasil perhitungan ES dari copula Clayton dan Gumbel dengan tingkat kepercayaan $(1 - \alpha)$ berturut-turut 90%, 95% dan 99% copula Clayton dan Gumbel dengan iterasi sebanyak 500 kali:

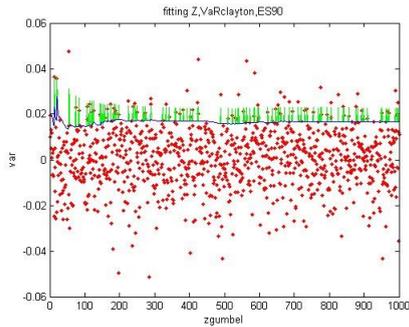


Figure 4: Expected Shortfall 90% dengan Copula Clayton

Pada gambar 4.8 merupakan hasil ES menggunakan copula Clayton. Dengan titik-titik yang berwarna merah merupakan return portofolio, garis biru merupakan nilai $VaR_{90\%}$ dan garis hijau merupakan nilai $ES_{90\%}$.

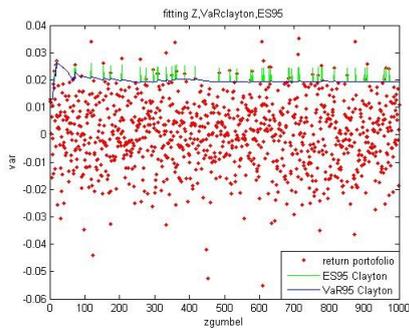


Figure 5: Expected Shortfall 95% dengan Copula Clayton

Pada gambar 4.9 merupakan hasil ES menggunakan copula Clayton. Dengan titik-titik yang berwarna merah merupakan return portofolio, garis biru merupakan nilai $VaR_{95\%}$ dan garis hijau merupakan nilai $ES_{95\%}$. Terlihat bahwa lebih sedikit return yang melebihi ES dibandingkan dengan $ES_{90\%}$.

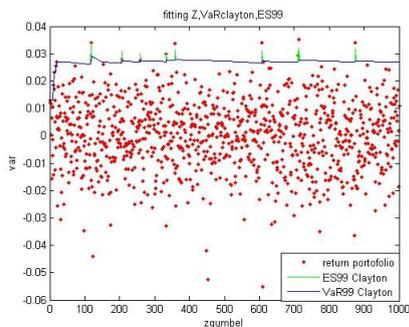


Figure 6: Expected Shortfall 99% dengan Copula Clayton

Pada gambar 4.10 merupakan hasil ES menggunakan

nakan copula Clayton. Dengan titik-titik yang berwarna merah merupakan return portofolio, garis biru merupakan nilai $VaR_{99\%}$ dan garis hijau merupakan nilai $ES_{99\%}$. Terlihat bahwa nilai return yang melewati ES paling dibandingkan dengan $ES_{95\%}$ dan $ES_{90\%}$

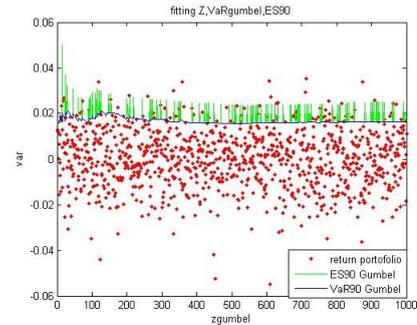


Figure 7: Expected Shortfall 90% dengan Copula Gumbel

Pada gambar 4.11 merupakan hasil ES menggunakan copula Gumbel. Dengan titik-titik yang berwarna merah merupakan return portofolio, garis biru merupakan nilai $VaR_{90\%}$ dan garis hijau merupakan nilai $ES_{90\%}$

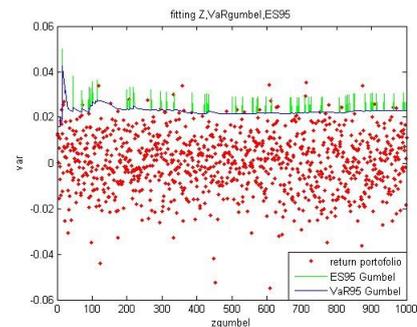


Figure 8: Expected Shortfall 95% dengan Copula Gumbel

Pada gambar 4.12 merupakan hasil ES menggunakan Copula Gumbel. Dengan titik-titik yang berwarna merah merupakan return portofolio, garis biru merupakan nilai $VaR_{95\%}$ dan garis hijau merupakan nilai $ES_{95\%}$ terlihat bahwa nilai ES berada di atas nilai VaR . Terlihat bahwa nilai return yang melewati ES lebih sedikit dibandingkan dengan $ES_{90\%}$.

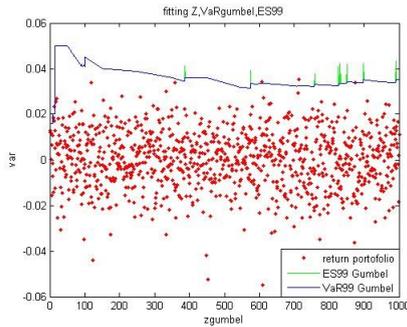


Figure 9: Expected Shortfall 99% dengan Copula Gumbel

Pada gambar 4.13 merupakan hasil ES menggunakan copula Gumbel. Dengan titik-titik yang berwarna merah merupakan return portofolio, garis biru merupakan nilai $VaR_{99\%}$ dan garis hijau merupakan nilai $ES_{99\%}$. Terlihat bahwa nilai return yang melampaui ES paling edikit terjadi pada ES 99% dibandingkan dengan ES 95%. Perlu diperhatikan bahwa nilai ES selalu berada di atas atau sama dengan VaR. Sehingga, ES dinilai lebih 'aman' untuk digunakan dalam acuan investasi, tetapi tidak lebih efisien dibandingkan dengan VAR pada tingkat kepercayaan yang sama.

4.0.1 Expected Shortfall Violation

Violation Expected Shortfall digunakan untuk menentukan metode copula yang sesuai dalam menentukan Expected Shortfall antara copula Clayton dengan copula Gumbel pada portofolio. Berikut ini merupakan hasil Violation Expected Shortfall ketiga tingkat kepercayaan dari masing-masing copula:

Table 3: Hasil Violation Expected Shortfall

Jumlah Periode	1000			
Expected violation	100	50	10	
α	10%	5%	1%	Error
Clayton	72	37	18	127
Gumbel	61	28	6	95

Berdasarkan hasil Violation Expected Shortfall, Mean Error ES dari copula Gumbel lebih kecil dari copula Clayton. Oleh karena itu, ES dengan menggunakan copula Gumbel merupakan alternatif yang lebih baik untuk menentukan ES.

Untuk memprediksi nilai ES pada hari tertentu menggunakan copula Gumbel dengan tingkat kepercayaan $1 - \alpha$. Berikut ini merupakan nilai perediksi ES pada periode ke-998:

$ES_{90\%}$	$ES_{95\%}$	$ES_{99\%}$
0.0160	0.0216	0.0340

Berdasarkan dari tabel terlihat bahwa nilai ES copula Gumbel pada hari ke-998 semakin besar tingkat kepercayaan yang digunakan maka semakin besar nilai ES pada hari yang sudah ditentukan yang artinya, jika kita menggunakan $ES_{90\%}$ untuk nilai risiko pada hari ke-998 peluang kerugian maksimum 0.0133 sebesar adalah 90% dan peluang kerugian melebihi 0.0160 adalah sebesar 10%. Berlaku juga hal yang sama pada $ES_{95\%}$ dan $ES_{99\%}$

5 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh, dapat disimpulkan bahwa :

1. Distribusi marginal data return saham HONDA dan TOYOTA adalah distribusi logistik. Pengujian dilakukan dengan menggunakan salah satu metode Goodness-of-Fit distribusi yakni metode Anderson-Darling.
2. Model copula dapat diperoleh menggunakan tingkat kebergantungan anatar aset menggunakan Kendall's Tau
3. Setiap copula mempunyai fungsi generator yang berbeda dalam mencari estimasi parameter, parameter pada masing-masing model copula yaitu parameter copula Clayton sebesar 2.39 dan copula gumbel sebesar 2.19.
4. Nilai prediksi Expected Shortfall pada portofolio dapat diperoleh menggunakan copula. Nilai estimasi ES pada periode ke 998 sebagai berikut:

ES Copula Clayton		
$ES_{90\%}$	$ES_{95\%}$	$ES_{99\%}$
0.0157	0.0213	0.0296
VaR Copula Clayton		
$VaR_{90\%}$	$VaR_{95\%}$	$VaR_{99\%}$
0.0157	0.0213	0.029

ES Copula Gumbel		
$ES_{90\%}$	$ES_{95\%}$	$ES_{99\%}$
0.0160	0.0216	0.0340
VaR Copula Gumbel		
$VaR_{90\%}$	$VaR_{95\%}$	$VaR_{99\%}$
0.0160	0.0216	0.0340

Perlu diperhatikan bahwa nilai ES selalu berada di atas atau sama dengan VaR. Sehingga, ES dinilai lebih 'aman' untuk digunakan dalam acuan investasi, tetapi tidak lebih efisien dibandingkan dengan VAR pada tingkat kepercayaan yang sama.

5. Copula yang lebih baik antar copula Clayton dengan copula Gumbel dalam menentukan nilai prediksi Expected Shortfall adalah copula Gumbel. Karena nilai mean error yang diperoleh dari Violation Expected Shortfall copula Gumbel lebih kecil dari copula Clayton yaitu 127 untuk copula Clayton dan 95 untuk copula Gumbel.

References

- [1] McNeil A.J., Frey R., Embrechts P. Quantitative Risk Management, 2005.
- [2] Lindskog, F., McNeil, A. and Schmock, U. (2001) A Note on Kendall's Tau for Elliptical Distribution. ETH Zurich, working paper
- [3] Kahya, Goksel.B.S (1991). New Modified Anderson-Darling and Cramer-von Mises Goodness-of-fit Tests for a Normal Distribution with Specified Parameters. Ohio.
- [4] Nelsen, R.B. (2006). Second ed. An Introduction to Copulas. Springer, New York.
- [5] Clayton, D.G., 1978. A model for association in bivariate life tables and its application to a uranium exploration data set. *Technometrics* 28, 123-131
- [6] Genest, C., 1987. Franks family of bivariate distribution. *Biometrika* 74, 549-555. Gumbel, E.J., 1960. Bivariate exponential distributions. *Journal of American Statistical Association* 55, 698-707.
- [7] Hanafi, M. 2006. Manajemen Risiko. Yogyakarta: Unit Penerbit Dan Percetakan Sekolah Tinggi Manajemen YKPN.
- [8] Rohmawati, A.A. (2014). Eksplorasi hubungan Value-at-Risk dan Conditional Value-at-Risk. Thesis Magister pada Institut Teknologi Bandung: tidak diterbitkan.
- [9] Danielsson, J. Financial Risk Forecasting The Theory and Practice of Forecasting Market Risk with Implementation in R and Matlab, 2011.
- [10] Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber dan D. Heath. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance* 9:203-222