PENENTUAN HARGA OPSI *BARRIER* DENGAN METODE *AVERAGING BINOMIAL*

RinaldiWibiyanto[1], RianFebrianUmbara[2], IrmaPalupi[3]

[1,2,3]Prodi Ilmu Komputasi Fakultas Informatika, Telkom University, Bandung
[1] rinaldi.wb@gmail.com, [2] rianum@telkomuniversity.ac.id, [3]irmapalupi@telkomuniversity.ac.id

Abstrak

Opsi merupakan kontrak resmi yang memberi hak kepada *holder* untuk membeli/menjual suatu aset dari/kepada *writer* dengan harga tertentu dan jangka waktu tertentu. Opsi *barrier* adalah opsi dimana *payoff* saat jatuh tempo tergantung apakah harga aset mencapai level harga yang telah ditentukan selama masa hidup opsi. Salah satu metode yang efisien untuk menentukan harga opsi adalah metode binomial. Pendekatan metode binomial konvergen ke model Black-Scholes tetapi menghasilkan *error* dengan fluktuasi tinggi dan garis gergaji yang masih besar pada saat menentukan harga opsi. Pada Tugas Akhir ini akan dibahas cara menentukan harga opsi *call barrier* tipe Eropa dengan menggunakan metode *averaging binomial*. Perbedaan dari metode binomial yaitu metode *averaging binomial* menggunakan rata-rata lokal pada *payoff* saat *expiry date*. Dalam penentuan harga opsi *barrier* dibutuhkan beberapa parameter, yaitu harga opsi, harga kesepakatan, harga *barrier*, volatilitas, dan tingkat bunga bebas resiko. Setelah menentukan harga opsi *barrier* dengan metode *averaging binomial*, dihasilkan *error* dengan fluktuasi lebih rendah dan garis gergaji lebih halus. Hal tersebut menjadikan metode *averaging binomial* lebih stabil dan lebih cepat konvergen ke model Black-Scholes.

Kata kunci : harga opsi, opsi *barrier*, *averaging binomial*, *local average* (rata-rata lokal)

Abstract

An option is a contract which gives the right to the holder to buy or sell an asset from/to a writer at a specified price and on specified date period. Barrier option is an option which the payoff depends on whether the asset price reaches a predetermined price level during the lifetime of the option. One of the efficient method to determine the option pricing is the binomial method. The binomial method approximation convergent to Black-Scholes model but resulting in an error with high fluctuations and saws pattern are still large when determining the option price. In this Final Project will be discussed how to determine European barrier call option using averaging binomial method. The difference from the binomial method is averaging binomial method using local average at the payoff on the expiry date. Barrier option pricing needs some parameters, such that the option price, strike price, barrier price, volatility, and risk-free interest rates. After determining the barrier option price using averaging binomial method, resulting in an error with lower fluctuations and smaller saws pattern. This makes averaging binomial method more stable and quickly converge to the Black-Scholes model.

Keywords: option pricing, barrier option, averaging binomial, local average.

1. Pendahuluan

Beberapa ilmuwan melakukan pendekatan numerik untuk menentukan harga opsi. Salah satu pendekatan numerik yang banyak digunakan dan mudah di implementasikan adalah metode binomial. Sejak penelitian oleh Cox et al [1], metode binomial digeneralisasi untuk model multi-aset [2], untuk rumus Black-Scholes dengan ekstrapolasi [3], dan beberapa model lainnya [4, 5]. Pendekatan harga opsi dengan metode binomial konvergen terhadap harga opsi model Black-Scholes [6, 7]. Namun, proses kekonvergenan tersebut ternyata masih kurang handal karena membutuhkan banyak perhitungan komputasi untuk mendapatkan hasil yang akurat. Begitu juga pada saat menentukan nilai opsi *barrier*, dimana metode binomial masih kurang efektif dalam penentuan *payoff* agar mencapai level harga tertentu pada pergerakan harga aset. Sehingga dari permasalahan tersebut metode binomial dikembangkan menjadi metode *averaging binomial*, yaitu menghitung rata-rata lokal pada *payoff* saat waktu jatuh tempo [8]. Oleh karena itu, akan membahas bagaimana perhitungan untuk menentukan harga opsi *barrier*, serta menganalisis kompleksitas waktu komputasi metode *averaging binomial* dalam penentuan harga opsi *barrier*.

2. Landasan Teori

2.1 Opsi

Opsi adalah kontrak resmi yang memberikan hak (tetapi bukan kewajiban) kepada pemegang opsi (*holder)* untuk membeli atau menjual suatu aset dasar (*underlying asset*) dari penerbit opsi (*writer)* dengan harga tertentu dan jangka waktu tertentu dimasa yang akan datang. Harga tertentu dikenal juga sebagai harga pelaksanaan *(exercise price)* atau harga kesepakatan (*strike price*). Pemegang opsi yang melakukan *exercise* akan mendapatkan keuntungan (kotor), yang disebut dengan *payoff*. Berdasarkan pelaksanaan haknya, opsi dibagi menjadi dua jenis, yaitu sebagai berikut:

Call option (opsi beli) merupakan kontrak yang memberikan hak pemegang opsi untuk membeli suatu aset tertentu dari penerbit opsi dengan harga kesepakatan dan dalam jangka waktu tertentu. Untuk menghitung nilai *payoff* dari opsi *call* [9] :

$$C = max\ (S_T - K, 0) \quad (1)$$

dimana,
C = nilai *payoff* opsi *call*
S_T = harga aset saat T
K = harga kesepakatan

Put option (opsi jual) merupakan kontrak yang memberikan hak pemegang opsi untuk menjual suatu aset tertentu kepada penerbit opsi dengan harga kesepakatan dan dalam jangka waktu tertentu. Untuk menghitung nilai *payoff* dari opsi *put* [9] :

$$P = max\ (K - S_T, 0) \quad (2)$$

dimana,
P = nilai *payoff* opsi *put*
S_T = harga aset saat T
K = harga kesepakatan

2.2 Opsi *Barrier*

Opsi *barrier* adalah salah satu jenis opsi *exotic*, yaitu jenis opsi *path-dependent* yang *payoff* saat jatuh tempo tergantung pada pergerakan harga aset apakah harga aset dasar sudah mencapai level harga *barrier (B)* yang telah ditentukan selama masa hidup opsi. Untuk mendeskripsikan struktur *payoff* opsi *barrier*, ditentukan maksimum dan minimum dari proses harga aset $\{0 < < \}$ sebagai $= \inf\{0 < < \}$ dan $= \sup\{0 < < \}$.

Menurut P.G. Zhang [10], opsi *barrier* dibagi menjadi empat jenis opsi *call* yaitu, sebagai berikut:

1. Opsi *call up-and-in* (UI)

Opsi *call* UI pada permulaan harga *barrier* diset diatas harga aset dasar, yaitu $B >$. Opsi UI memiliki *payoff* sama dengan nol kecuali saat harga aset dasar mencapai harga *barrier* pada waktu yang ditentukan selama masa hidup opsi, maka nilai *payoff* adalah opsi *call* standar. Oleh karena itu, *payoff* opsi *call* UI pada jatuh tempo:

$$(,) = (-)^{+}(\ge) \quad (3)$$

dimana $(\ge)$ adalah fungsi indikator sama dengan satu jika $\ge$ dan sama dengan nol jika $<$

2. Opsi *call up-and-out* (UO)

Opsi *call* UO pada permulaan harga *barrier* diset diatas harga aset dasar, yaitu $B >$ Opsi UO adalah opsi *call* standar kecuali saat harga aset dasar mencapai harga *barrier*, maka nilai *payoff* sama dengan nol. Oleh karena itu, *payoff* opsi *call* UO pada jatuh tempo:

$$(,) = (-)^{+}(<) \quad (4)$$

dimana $(<)$ adalah fungsi indikator sama dengan satu jika $<$ dan sama dengan nol jika $\ge$

3. Opsi *call down-and-in* (DI)

Opsi *call* DI pada permulaan harga *barrier* diset dibawah harga aset dasar, yiatu $B <$. Opsi DI memiliki *payoff* sama dengan nol kecuali saat harga aset dasar mencapai harga *barrier* pada waktu yang ditentukan selama masa hidup opsi, maka nilai *payoff* adalah opsi *call* standar. Oleh karena itu, *payoff* opsi *call* DI pada jatuh tempo:

$$(,) = (-)^{+}(\le) \quad (5)$$

dimana $(\le)$ adalah fungsi indikator sama dengan satu jika $\le$ dan sama dengan nol jika $\ge$

4. Opsi *call down-and-out* (DO).

Opsi *call* DO pada permulaan harga *barrier* diset dibawah harga aset dasar, yiatu $B <$. Opsi DO adalah opsi *call* standar kecuali saat harga aset dasar mencapai harga *barrier* lebih rendah selama masa hidup opsi, hal ini menjadikan tidak berharga atau sama dengan nol. Oleh karena itu, *payoff* opsi *call* DO pada jatuh tempo:

$$(,) = (-)^{+}(>) \quad (6)$$

dimana $(>)$ adalah fungsi indikator sama dengan satu jika $>$ dan sama dengan nol jika $<$

2.3 Model Black-Scholes Untuk Penentuan Harga Opsi *Barrier*

Formula ini didapatkan dengan proses penurunan matematika menggunakan model stokastik sebagai *geometric Brownian motion*:

$$= \mu + \sigma \quad (7)$$

dimana,
μ = ekspetasi *return*,
σ = volatilitas dari aset
W = *Brownian motion*

Sehingga model Black-Scholes untuk menentukan harga opsi *call* dan *put* tipe Eropa dapat dihitung dengan formula berikut [9]:

$$=) - ^{(-)}) \quad (8)$$

$$= ^{(-)} (-) - (-) \quad (9)$$

Selanjutnya, diperoleh bahwa:

$$= \frac{(/) + (+ \frac{^2}{2})(-)}{\sqrt{- }} \quad (10)$$

$$= - \sqrt{- } \quad (11)$$

dimana,
C = nilai opsi *call* Eropa
P = nilai opsi *put* Eropa
S = harga aset saat *t*
K = harga kesepakatan
r = tingkat bunga bebas risiko (*interest rate)*
T-t = waktu sampai jatuh tempo

σ = volatilitas dari aset
$N(x)$ = fungsi distribusi normal baku kumulatif
$N(-x) = 1- N(x)$

Berdasarkan definisi pada opsi *barrier* [10], maka ditentukan opsi *call down-barrier* dengan kondisi B < K dan opsi *call up-barrier* dengan B > K. Disimbolkan harga opsi Black-Schole untuk opsi call *Vanilla* = $C_{BS}(S, K)$ dan opsi put *Vanilla* = $P_{BS}(S, K)$, serta ditentukan rumus $\frac{\sigma^2}{2}$ dan $\frac{\log(\frac{S}{K})+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$. Selanjutnya, menentukan $N(x)$ sebagai fungsi distribusi normal standar kumulatif. Dengan menggunakan notasi-noatsi tersebut, maka penentuan harga opsi *call barrier* untuk model Black-Scholes dapat dirumuskan, sebagai berikut:

1. Opsi *call up-and-in* (UI)

$$C_{ui} = \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda} \{S N(y) - K e^{-rT} N(y - \sigma\sqrt{T})\} + \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda-2} \{B N(x) - K e^{-rT} N(x - \sigma\sqrt{T})\} \quad (12)$$

2. Opsi *call up-and-out* (UO)

$$C_{uo} = S N(x) - K e^{-rT} N(x - \sigma\sqrt{T}) - \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda} \{S N(y) - K e^{-rT} N(y - \sigma\sqrt{T})\} - \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda-2} \{B N(x) - K e^{-rT} N(x - \sigma\sqrt{T})\} \quad (13)$$

3. Opsi *call down-and-in* (DI)

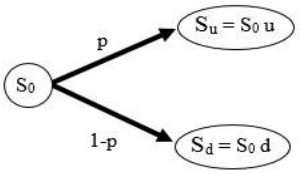
$$C_{di} = \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda} S N(y) \quad (14)$$

4. Opsi *call down-and-out* (DO)

$$C_{do} = S N(x) - \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda-2} K e^{-rT} N(x - \sigma\sqrt{T}) \quad (15)$$

2.4 Metode Binomial Standar

Harga opsi ditentukan dengan ekspetasi nilai *payoff* pada saat jatuh tempo. Untuk menghitung nilai *payoff* diperlukan *exercise price* dan harga aset. Untuk menentukan pergerakan harga aset hingga waktu jatuh tempo, dimodelkan dengan metode binomial *M* langkah. Metode binomial menggunakan model diskrit sederhana untuk pergerakan harga aset. Sehingga dimisalkan $\Delta t = T / M$ merupakan selang waktu, *T* adalah waktu jatuh tempo. Maka harga aset akan dipertimbangkan dengan waktu $t_i = i \Delta t$, dimana $i = 0, 1, 2, ..., M$ atau $0 \leq i \leq M$. Dasar metode binomial adalah

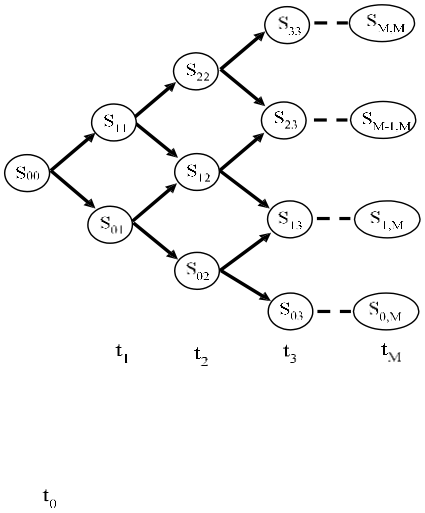


Gambar 1. Prinsip perubahan harga aset metode Binomial

Selain itu, dimisalkan $S_i = S(t_i)$ adalah harga aset pada saat t_i. Maka dengan perubahan dari $t_i = t$ ke $t_{i+1} = t + \Delta t$ didapatkan ekspetasi harga aset dengan tingkat bunga bebas risiko *r*, dari S_i saat waktu t_i menjadi S_{i+1} saat waktu t_{i+1} adalah:

$$S_{i+1}) = S_i e^{r\Delta t}. \quad (16)$$

Dengan menggunakan asumsi diatas, kita dapat meng-ilustrasikan skema pergerakan harga asset secara binomial.



Gambar 2. Ilustrasi pergerakan harga aset metode Binomial

Dari ilustrasi diatas, pergerakan harga aset pada saat $t = t_i = i \Delta t$ terdapat kemungkinan $i + 1$ dengan rumus:

$$S_{ij} = S_0 u^j d^{i-j}, \; 0 \leq j \leq i \; 0 \leq i \leq M \quad (17)$$

Maka dihasilkan nilai opsi yang merupakan ekspetasi dari nilai *payoff* pada saat waktu jatuh tempo.

Berdasarkan pergerakan aset, metode binomial pada saat t_j bergerak mundur dari $j = M-1, M-2, ...,0$ secara rekursif. Maka bentuk persamaan induksi mundur untuk nilai opsi *(V) call* dan *put* Eropa:

$$V_{ij} = e^{-r\Delta t}(p V_{i+1,j+1} + (1 - p) V_{i+1,j}), \; 0 \leq j \leq i \; 0 \leq i \leq M \; 1. \quad (18)$$

2.5 Nilai Parameter u,d,p

Nilai-nilai parameter berikut merupakan model oleh Cox, Ross, Rubintstein (CRR, 1979) [11, 9].

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \; d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \; p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad (19)$$

pergerakan harga suatu aset yang dapat naik (u) dan turun (d). Misalkan harga aset (S) pada saat $t = 0$ adalah S_0, dan pada saat $t = T$ adalah S_u saat harga naik dengan peluang p dan S_d saat harga turun dengan peluang $1-p$.

2.6 Metode *Averaging Binomial*

Metode *averaging binomial* adalah perhitungan menggunakan rata-rata lokal pada *payoff* saat jatuh tempo. Menurut pengamatan [8] K-S. Moon, H. Kim, hal ini menjadikan konvergensi metode dengan model Black-Scholes lebih stabil dan lebih handal.

Ditentukan notasi $X(t) = ln\ (S(t))$. Pada saat $t=t_i$ = i Δt untuk i = 0,1,2, …, M, ada kemungkinan harga aset $i+1$, yang dirumuskan:

$$\hat{X}_{i} = \hat{X}_0 + (2\hat{i} - \hat{i})\ h, \quad 0 \le \hat{i} \le \hat{i} \qquad (20)$$

dimana, $X_0 = X(0)$ dan $h = ln\ u$

Pada saat jatuh tempo, dibagi interval sel $[\hat{X}_0 - (\hat{i} + 1)\ h,\ \hat{X}_0 + (\hat{i} + 1)\ h]$ menjadi $M + 1$ tidak saling tumpang tindih dengan jarak panjang sel $2h$. Pertama, menghitung rata-rata harga opsi pada setiap sel saat jatuh tempo, sebagai berikut:

$$\bar{\hat{X}}_{i} = \frac{1}{2h}\int_{\hat{X}_{i-1/2}}^{\hat{X}_{i+1/2}} \max(\hat{X}, \hat{X}_{i}, \hat{i} = 0, \dots, \hat{i} \qquad (21)$$

Kemudian, melakukan perhitungan induksi mundur berdasarkan rata-rata harga opsi diatas dengan persamaan berikut:

$$\bar{\hat{X}}_{i} = \hat{X}^{-r\Delta\hat{i}}(\bar{\hat{X}}_{i+1,\hat{i}+1} + (1 - \bar{\hat{X}}_{i+1}),$$
$$\hat{i} = \hat{i} - 1, \dots, 0 \qquad (22)$$

Untuk kasus opsi *exotic* atau *barrier*, B. Lyuu [12] menjelaskan algoritma pohon binomial untuk opsi *barrier*, bahwa *payoff* setiap node dari pohon pada waktu jatuh tempo dihitung menggunakan harga aset yang terkait dengan terminal node. Berdasarkan definisi pada opsi *barrier* (subbab bagian 2.2), saat algoritma induksi mundur akan periksa apakah harga *barrier* telah dicapai atau tidak oleh harga aset dasar. Dengan ini, dapat asumsikan seperti berikut:

- Jika harga aset mencapai dibawah harga *barrier* $(x+h < B)$, maka nilai opsi sama dengan nol → $\bar{\hat{X}}_{i} = 0$.
- Jika harga aset pada sel tidak menyentuh harga *barrier* $(B < x-h)$, maka bisa menggunakan induksi mundur standar pada persamaan (33).
- Jika harga aset menyentuh harga *barrier* dalam kasus opsi *call barrier down-and-out* (DO) tipe Eropa, rata-rata harga opsi dalam sel $[x-h,\ x+h]$ dapat dihitung dengan persamaan induksi mundur berikut:

  a) $x - h < B < x$

$$\bar{\hat{X}}_{i} = \hat{X}^{-r\Delta\hat{i}}\left(\hat{X}\ \frac{\hat{X}+h-B}{2h}\ \bar{\hat{X}}_{i+1,\hat{i}+1} + (1 - \bar{\hat{X}}_{i+1})\right) \qquad (23)$$

  b) $x \le B < x + h$

$$\bar{\hat{X}}_{i} = \hat{X}^{-r\Delta\hat{i}}\left(\frac{\hat{X}+h-B}{2h}\ \bar{\hat{X}}_{i+1,\hat{i}+1}\right) \qquad (24)$$

Maka hasil induksi mundur dari persamaan (22), (23), dan (24) akan didapatkan nilai rata-rata $\bar{\hat{X}}_0$ untuk harga opsi saat $t=0$ pada sel $[\hat{X}_0 - h, \hat{X}_0 + h]$.

Selanjutnya untuk menghitung harga opsi $\hat{X}_0$ saat dengan mendefinisikan $\hat{X}(\hat{X}) = \int_{\hat{X}_0-3h}^{\hat{X}} \hat{X}(\hat{X}, 0)\ \hat{X}\hat{X}$,

dapat menurunkannya untuk menghitung harga opsi $\hat{X}_0 = \hat{X}(\hat{X}_0, 0)$ saat $t = 0$, sebagai berikut:

$$\hat{X}(\hat{X}_0, 0) = -\frac{1}{24}\hat{X}_{-1} + \frac{13}{12}\hat{X}_0 - \frac{1}{24}\hat{X}_1 \qquad (25)$$

2.7 Nilai Konvergen *Error*

Nilai *error* yaitu menghitung selisih harga opsi Black-Scholes terhadap harga asli opsi *barrier* dengan metode *averaging binomial*, seperti pada rumus :

$$\hat{X}\hat{X}\hat{X}\hat{X} = |\hat{X}_{i} - \hat{X}_{i}| \qquad (26)$$

dimana,

V_{BS} = harga opsi *call barrier down-out* dengan model Black-Scholes

V_i = harga asli opsi *call barrier down-out*

2.8 Nilai Konvergen RMSE

Untuk menghitung nilai RMSE, digunakan selisih *error* pada persamaan (38). Maka didapat rumus RMSE (*Root Mean Square Error*) seperti pada persamaan berikut:

$$(\hat{X}\hat{X}\hat{X}\hat{X} = \sqrt{\frac{1}{\hat{X}}\sum_{\hat{X}=1}^{\hat{X}} \hat{X}_{B\hat{X}} - \hat{X}_{\hat{X}}}\ )^2 \qquad (27)$$

dimana,

V_{BS} = harga opsi *call barrier down-out* Black-Scholes

Vi = harga asli opsi *call barrier down-out*

m = jumlah opsi saham

3. Analisis Hasil dan Implementasi

Pada penelitian ini menggunakan beberapa perangkat untuk melakukan perhitungan komputasi dan pengolahan data, yaitu *software* Matlab R2014a dan Microsoft Excel 2013, dan perangkat laptop ASUS A451LB dengan prosesor Intel Core i5 1.60 GHz RAM 4GB.

3.1 Simulasi 6 Data dan Kekonvergenan Metode *Averaging Binomial* Terhadap Model Black-Scholes

Pada simulasi ini, digunakan data saham harian dari 6 perusahaan yang ada di Amerika Serikat (U.S). Data saham diperoleh dari situs Yahoo! Finance yang diambil mulai tanggal 30 Oktober 2014 sampai dengan tanggal 30 Oktober 2015.

Suku bunga yang digunakan adalah suku bunga yang $t=0$ dari rata-rata harga opsi $\bar{\hat{X}}_0$, digunakan formula oleh Lele [13], yaitu estimasi akurat *fourth-order* dari $\hat{X}'(\hat{X})$ dengan menghubungkan fungsi nilai pada titik terdekat, sebagai berikut:

berlaku pada Negara Amerika. Suku bunga Negara Amerika diperoleh dari "US.Department of The Treasury" yang diambil pada tanggal 30 Oktober 2015, maka didapat nilai tingkat bunga bebas risiko (r) adalah 2.57% atau 0.0257.

$$f'(x) = \frac{9}{8}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{2h}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{f(x+3h)-f(x-3h)}{6h}\right) \quad (24)$$

Kemudian dari 6 data saham tersebut, dapat ditentukan batasan parameter untuk proses perhitungan harga opsi *barrier*, sebagai berikut:

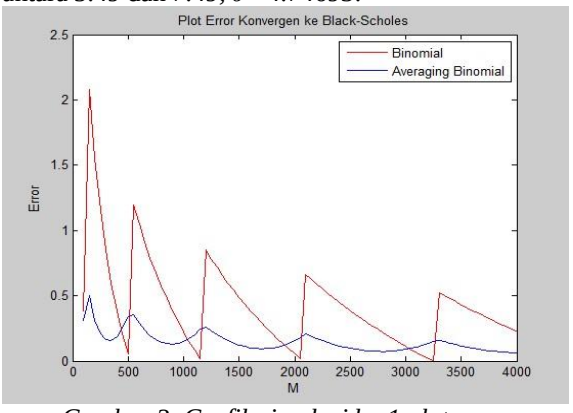
Harga aset dasar (S0) = harga saham awal, Harga

kesepakatan (K) = acak seragam mengikuti harga aset dasar, Harga *barrier* (B) = acak seragam

dibawah harga K, B < K (opsi *call down-out*), Volatilitas (σ) = konstan dari data saham , Waktu jatuh tempo (T) = 1 tahun, M = 100-4000, Tingkat bunga bebas resiko (r) = 2.57%. Keterangan: harga dalam satuan $ USD.

Pada simulasi ini akan menampilkan hasil perbandingan harga opsi *call barrier down-out* tipe Eropa menggunakan metode binomial dan metode *averaging binomial*, serta hasil kekonvergenan nilai *error* kedua metode tersebut terhadap harga opsi *call barrier down-out* menggunakan model Black-Scholes.

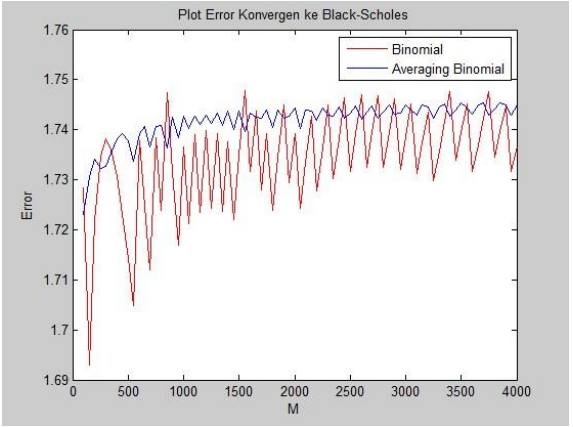
Berikut ini adalah hasil dari simulasi ke-1 menggunakan data saham perusahaan **VelocityShares 3x Long Crude Oil ETN (UWTI)** dengan parameter sebagai berikut: S0= 10.49, K= acak seragam antara 8.49 dan 12.49, B= acak seragam antara 5.49 dan 7.49, σ= 4.74693.



Gambar 3. Grafik simulasi ke-1 plot error konvergen ke Black-Scholes

Dari hasil data diatas ditentukan parameter harga K=10.1581 dan B=6.9306, dengan harga opsi Black-Scholes = 3.581674.

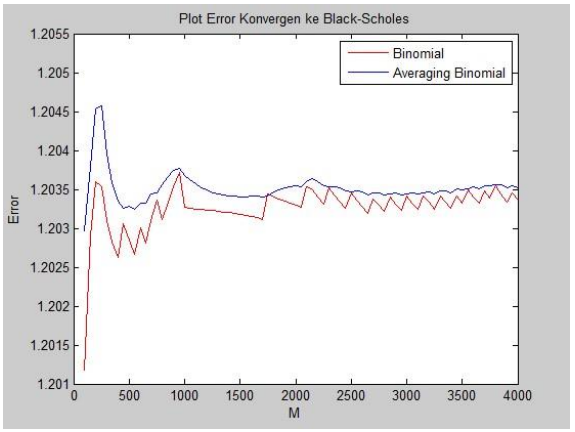
Berikut ini adalah hasil dari simulasi ke-2 menggunakan data saham perusahaan **iPath S&P 500 VIX ST Futures ETN (VXX)** dengan parameter sebagai berikut: S0= 18.86, K= acak seragam antara 16.86 dan 20.86, B= acak seragam antara 13.56 dan 15.86, σ= 0.31325.



Gambar 4. Grafik simulasi ke-2 plot error konvergen ke Black-Scholes

Dari hasil data diatas ditentukan parameter harga K=18.5281 dan B= 15.2167, dengan harga opsi Black-Scholes = 4.199586.

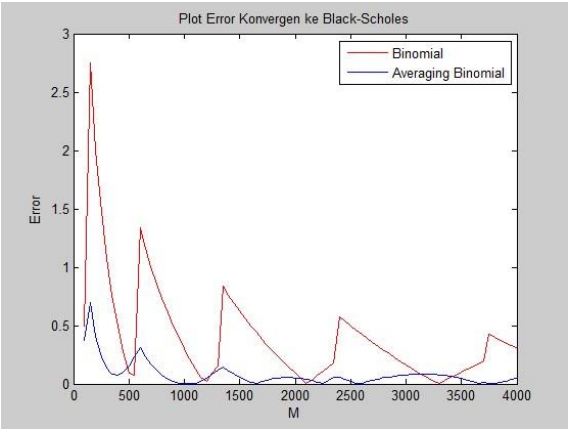
Berikut ini adalah hasil dari simulasi ke-3 menggunakan data saham perusahaan **General Motors Company (GM)** dengan parameter sebagai berikut: S0= 34.91, K= acak seragam 32.91 dan 36.91,B= acak seragam antara 29.91 dan 31.91, σ= 0.073763.



Gambar 5. Grafik simulasi ke-3 plot error konvergen ke Black-Scholes

Dari hasil data diatas ditentukan parameter harga K=34.5781 dan B= 31.3506, dengan harga opsi Black-Scholes = 2.92826.

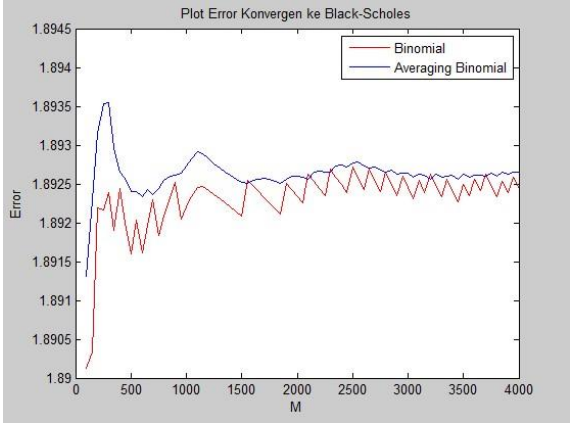
Berikut ini adalah hasil dari simulasi ke-4 menggunakan data saham perusahaan **Direxion Daily Gold Miners Bull 3X ETF (NUGT)** dengan parameter sebagai berikut: S0= 34.69, K= acak seragam antara 32.69 dan 36.69, B= acak seragam antara 29.69 dan 31.69, σ= 1.327498.



Gambar 6. Grafik simulasi ke-4 plot error konvergen ke Black-Scholes

Dari hasil data diatas ditentukan parameter harga K= 34.8932 dan B= 31.1063, dengan harga opsi Black-Scholes = 3.747462.

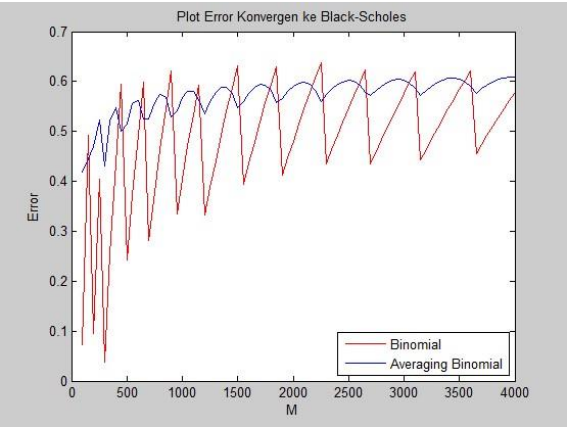
Berikut ini adalah hasil dari simulasi ke-5 menggunakan data saham perusahaan **Market Vectors ETF Trust - Market Vectors Junior Gold Miners ETF (GDXJ)** dengan parameter sebagai berikut: S0= 20.45, K= acak seragam antara 18.45 dan 22.45, B= acak seragam antara 15.45 dan 17.45, σ= 0.1369543.



Gambar 7. Grafik simulasi ke-5 plot error konvergen ke Black-Scholes

Dari hasil data diatas ditentukan parameter harga K= 20.1181 dan B= 16.8906, dengan harga opsi Black-Scholes = 3.45503.

Berikut ini adalah hasil dari simulasi ke-6 menggunakan data saham perusahaan **Direxion Daily Small Cap Bear 3X ETF (TZA)** dengan parameter sebagai berikut: S0= 43.8, K= acak seragam antara 41.8 dan 45.8, B= acak seragam antara 38.8 dan 40.8, σ= 0.365619.



Gambar 8. Grafik simulasi ke-6 plot error konvergen ke Black-Scholes

Dari hasil data diatas ditentukan parameter harga K= 43.4681 dan B= 40.2406, dengan harga opsi Black-Scholes = 3.999662.

Dari 6 hasil grafik, dapat disimpulkan bahwa *error* dari metode binomial menunjukkan fluktuasi tinggi, sangat tidak stabil, dan garis gergaji yang sangat besar. Sedangkan error metode *averaging binomial* menunjukkan fluktuasi lebih rendah, lebih stabil, dan garis gergaji makin kecil hingga pada M=4000.

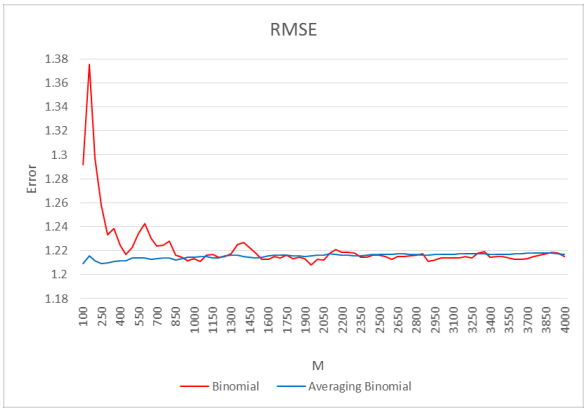
3.2 Simulasi 50 Data Saham dan Kekonvergenan Metode *Averaging Binomial* Terhadap Model Black-Scholes

Pada simulasi ini, digunakan data saham harian dari 50 perusahaan yang ada di Amerika Serikat (AS). Data saham diperoleh dari situs Yahoo! Finance yang diambil mulai tanggal 30 Oktober 2014 sampai dengan tanggal 30 Oktober 2015. Dari 50 data saham tersebut, ditentukan batasan parameter konstan: tingkat bunga bebas resiko (r) = 2.57%, waktu jatuh tempo (T) = 1 tahun, dan M = 100-4000. Berikut ini adalah parameter untuk 50 data saham:

1. **VelocityShares 3x Long Crude Oil ETN (UWTI)**
2. **iPath S&P 500 VIX ST Futures ETN (VXX)**
3. **General Motors Company (GM)**
4. **Direxion Daily Gold Miners Bull 3X ETF (NUGT)**
5. **Market Vectors ETF Trust - Market Vectors Junior Gold Miners ETF (GDXJ)**
6. **VelocityShares 3x Inv Natural Gas ETN (DGAZ)**
7. **ProShares Ultra VIX Short-Term Futures (UVXY)**
8. **Direxion Daily Small Cap Bear 3X ETF (TZA)**
9. **ProShares Ultra Bloomberg Crude Oil (UCO)**
10. **Direxion Daily Jr Gld Mnrs Bull 3X ETF (JNUG)**
11. **DBX ETF Trust - Deutsche X-trackers MSCI EAFE Hedged Equity ETF (DBEF)**
12. **SPDR Series Trust - SPDR Barclays High Yield Bond ETF (JNK)**
13. **iShares Trust - iShares iBoxx $ High Yield Corporate Bond ETF (HYG)**
14. **Market Vectors ETF Trust - Market Vectors Russia ETF (RSX)**
15. **Alerian MLP ETF (AMLP)**
16. **Direxion Daily Small Cap Bull 3X ETF (TNA)**
17. **ProShares UltraPro Short S&P500 (SPXU)**
18. **SPDR Barclays Short Term Hi Yld Bd ETF (SJNK)**
19. **Direxion Daily Financial Bull 3X ETF (FAS)**
20. **Cheniere Energy, Inc. (LNG)**
21. **Spirax-Sarco Engineering plc (SPXS)**
22. **Marathon Oil Corporation (MRO)**
23. **Short S&P500 (SH)**
24. **ProShares Trust - ProShares UltraShort QQQ (QID)**
25. **JPMorgan Alerian MLP ETN (AMJ)**
26. **WisdomTree Europe Hedged Equity ETF (HEDJ)**
27. **ProShares Ultra S&P500 (SSO)**
28. **ProShares Short VIX Short-Term Futures (SVXY)**
29. **Wells Fargo & Company (WFC)**
30. **Direxion Daily Energy Bull 3X ETF (ERX)**
31. **iShares Trust - iShares U.S. Home Construction ETF (ITB)**
32. **WisdomTree India Earnings ETF (EPI)**
33. **iShares Currency Hedged MSCI Japan (HEWJ)**
34. **Direxion Daily Energy Bear 3X ETF (ERY)**
35. **Vanguard S&P 500 ETF (VOO)**
36. **PowerShares Senior Loan ETF (BKLN)**
37. **ProShares UltraPro S&P500 (UPRO)**
38. **PowerShares S&P 500 Low Volatility ETF (SPLV)**
39. **Citigroup Inc. (C)**
40. **Market Vectors ETF Trust - Market Vectors Semiconductor ETF (SMH)**
41. **PowerShares Exchange-Traded Fund Trust II - PowerShares Emerging Markets Sovereign Debt Portfolio (PCY)**
42. **ProShares UltraShort 20+ Year Treasury (TBT)**

43. Vanguard Bond Index Funds - Vanguard Total Bond Market ETF (BND)
44. Wal-Mart Stores Inc. (WMT)
45. Straight Path Communications Inc. (STRP)
46. Kinder Morgan, Inc. (KMI)
47. JPMorgan Chase & Co. (JPM)
48. Oracle Corporation (ORCL)
49. Southwestern Energy Company (SWN)
50. Verizon Communications Inc. (VZ)

Dari 50 parameter data tersebut, untuk mengetahui kekonvergenan metode binomial dan *averaging binomial* terhadap Black-scholes, maka digunakan rumus RMSE (*Root Mean Square Error*) seperti pada persamaan (39). Maka didapatkan hasil perhitungan RMSE seperti berikut:



Gambar 9. Grafik perbandingan RMSE dari metode Binomial dan Averaging Binomial

Dari hasil grafik RMSE diatas, dapat disimpulkan metode binomial masih menunjukkan ada fluktuasi tinggi di awal M dan garis gergaji hingga M=850. Setelah M=850 fluktuasi *error* lebih rendah dan garis gergaji makin mengecil hingga pada M=4000. Sedangkan hasil RMSE dari metode *averaging binomial* menunjukkan adanya fluktuasi rendah di awal M. Setelah M=250 hasil grafik menunjukkan tidak ada fluktuasi dan garis gergaji hingga pada M=4000.

Untuk memastikan hasil grafik RMSE diatas, maka dilakukan uji statistik t – table perbandingan hasil metode *averaging binomial* dan binomial standar pada M ≤ 850 dan M > 850. Pengujian ini menggunakan *software* statistik Minitab 16, berikut penjelasan hasil uji statistik:

a) Uji Statistik t - tabel untuk M ≤ 850

Hipotesis :

Uji Satu sisi, $H_1 : \mu_1 < \mu_2$

H_0 : Tidak ada perbedaan RMSE *Averaging Binomial* dan RMSE Binomial.

H_1 : RMSE *Averaging Binomial* lebih kecil daripada RMSE Binomial.

Kriteria pengujian dan perbandingan t hitung dengan t tabel:

Uji Satu sisi, $H_1 : \mu_1 < \mu_2$

H_0 tidak ditolak, jika, t hitung > - t tabel

H_0 ditolak, jika, t hitung < - t tabel

Nilai t hitung < - t tabel → -3.36 < -1.69726, **H_0 ditolak** maka **H_1 tidak ditolak**. Dapat disimpulkan bahwa RMSE *Averaging Binomial* lebih kecil daripada RMSE Binomial.

b) Uji Statistik t – tabel M > 850

Hipotesis :

1. Uji Dua sisi, $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

H_0 : Tidak ada perbedaan RMSE *Averaging Binomial* dan RMSE Binomial.

H_1 : Ada perbedaan RMSE *Averaging Binomial* dan RMSE Binomial.

2. Uji Satu sisi, $H_1 : \mu_1 > \mu_2$

H_0 : Tidak ada perbedaan RMSE *Averaging Binomial* dan RMSE Binomial.

H_1 : RMSE *Averaging* Binomial lebih besar daripada RMSE Binomial.

Kriteria pengujian dan perbandingan t hitung dengan t tabel:

1. Uji Dua sisi, $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

H_0 tidak ditolak jika, - t tabel ≤ t hitung ≤ t tabel

H_0 ditolak jika, t hitung < - t tabel atau t hitung > t tabel

Nilai t hitung > t tabel → 2.20 > 1.97928, **H_0 ditolak**, maka **H_1 tidak ditolak**. Dapat disimpulkan bahwa ada perbedaan RMSE *Averaging Binomial* dan RMSE Binomial.

2. Uji Satu sisi, $H_1 : \mu_1 > \mu_2$

H_0 tidak ditolak jika, t hitung < t tabel

H_0 ditolak jika, t hitung > t tabel

Nilai t hitung > t tabel → 2.20 > 1.65723, **H_0 ditolak.** maka **H_1 tidak ditolak**. Dapat disimpulkan bahwa RMSE *Averaging* Binomial lebih besar daripada RMSE Binomial.

3.3 Hasil Perhitungan Kompleksitas Waktu Algoritma

A. Metode Binomial

Dari analisis perhitungan pada algoritma metode binomial, didapatkan total T(n): **$T(n) = 2n + n^2$**

Maka, dapat disimpulakn algoritma metode binomial memiliki kompleksitas waktu Big-O, yaitu **$O(n^2)$.**

B. Metode *Averaging Binomial*

Dari analisis perhitungan pada algoritma metode *averaging binomial*, didapatkan total T(n): **$T(n) = 4n+3n^2 + 3n+3n^2 + 3n+3n^2 = 10n + 9n^2$**

Maka, dapat disimpulkan algoritma metode *averaging binomial* memiliki kompleksitas waktu Big-O, yaitu **$O(n^2)$.**

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pengujian yang diperoleh, kesimpulan yang didapat dalam penggunaan metode *averaging binomial* untuk menghitung nilai opsi *barrier*, yaitu sebagai berikut:

1. Metode *averaging binomial* dapat digunakan untuk menghitung opsi *call barrier down-out* tipe Eropa.

2. Dari simulasi 6 data saham perusahaan di U.S., hasil grafik error kekonvergenan terhadap model Black-Scholes, pendekatan metode *averaging binomial* lebih stabil terhadap model Black-Scholes dibandingkan dengan metode binomial standar. Metode *averaging binomial* juga menunjukkan dapat berguna untuk mengurangi fluktuatif error yang tinggi dan garis gergaji yang besar dari metode binomial standar.

3. Dari simulasi 50 data saham perusahaan di U.S., hasil grafik dan uji statistik t RMSE *averaging binomial* dan binomial menunjukkan bahwa pada M > 850 RMSE binomial lebih konvergen ke model Black-Scholes. Sedangkan pada M ≤ 850 RMSE *averaging binomial* lebih konvergen ke model Black-Scholes. Maka kesimpulannya RMSE *averaging binomial* lebih cepat konvergen ke model Black-Scholes pada M ≤ 850.

4. Dari analisis perbandingan kompleksitas waktu algoritma penentuan harga opsi *barrier down-out* tipe Eropa antara metode binomial dan *averaging binomial* menunjukkan kesamaan hasil Big-O, yaitu $O(n^2)$.

Daftar Pustaka:

[1] J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein, Option pricing: a simplified approach, Journal of Financial Economics 7 (1979) 229–263.

[2] P. Boyle, A lattice framework for option pricing with two state variables, Journal of Financial Quantitative Analysis 23 (1988) 1–12.

[3] M. Broadie, J. Detemple, American options valuation: new bounds, approximations, and a comparison of existing methods, Review of Financial Studies 9 (1996) 1211–1250.

[4] P. Boyle, J. Evnine, S. Bibbs, Numerical evaluation of multivariate contingent claims, The Review of Financial Studies 2 (1989) 241–250.

[5] P. Ritchken, On pricing barrier options, Journal of Derivatives 3 (1995) 19-28.

[6] D.P.J. Leisen, M. Reimer, Binomial models for option valuation—examining and improving convergence, Applied Mathematical Finance 3 (1996) 319–346.

[7] J.B. Walsh, The rate of convergence of the binomial tree scheme, Finance and Stochastics 7 (2003) 337–361.

[8] K-S. Moon, H. Kim, An adapative averaging binomial method for option valuation, Operations Research Letters41 (2013) 511-515.

[9] D.J. Higham, An Introduction to Financial Option Valuation, New York: Cambridge, 2004.

[10] P.G. Zhang, Exotic Options, 2nd Edition, Singapore: World Scientific Publishing, 1998.

[11] A. Aziz, Empat Bentuk Nilai Parameter-Parameter u, d, dan p dalam Model Binomial Harga Saham, Departemen Matematika, Institut Teknologi Bandung (2004)

[12] Y.D. Lyuu, Financial Engineering and Computation, Cambridge, 2002.

[13] S.K. Lele, Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, Journal of Computational Physics 103 (1992) 16–42.

[14] Yahoo! Finance, [Online]. Available: http://finance.yahoo.com/ terakhir diakses tanggal 30 Oktober 2015.

[15] US. Department of The Treasury. Available: https://www.treasury.gov/Pages/default.aspx terakhir diakses tanggal 30 Oktober 2015.