PENENTUAN HARGA OPSI BELI EROPA DENGAN DUA PROSES VOLATILITAS STOKASTIK

Muhammad Faizal[1], Irma Palupi[2], Rian Febrian Umbara[3]

[1,2,3]Fakultas Informatika Prodi Ilmu Komputasi
Telkom University, Bandung
[1]isal_1308@hotmail.com, [2]irma.palupi@gmail.com, [3]rianum123@gmail.com

Abstrak

Opsi merupakan suatu emiten derivatif yang memperjualbelikan hak untuk menjual atau membeli atas suatu aset dengan harga tertentu dan selama waktu tertentu. Dalam menentukan harga Opsi bukan hal yang mudah. Salah satu model yang banyak digunakan untuk menghitung harga opsi Eropa adalah model Black & scholes. Dalam menentukan harga opsi eropa dengan model model Black & scholes masih memiliki kekurangan yaitu, tidak dapat menghitung harga opsi pada saat *out-of-the money*. Sedangkan dengan model dua proses volatilitas stokastik memberikan harga opsi yang lebih konsisten dalam menentukan harga opsi. Dengan menyubtitusikan model dua proses stokastik kedalam persamaan diferensial Black & scholes. Pada pengujian yang telah dilakukan, penentuan harga opsi Eropa dengan dua proses volatilitas stokastik memberikan hasil yang lebih mendekati harga pasar dibandingkan dengan satu proses volatilitas stokastik. Pada perhitungan MSE untuk model dua proses stokastik adalah 0,4478 sedangkan MSE untuk model satu proses stokastik adalah 0,4726 hal ini menunjukkan perbedaan yang tidak jauh antara model dua proses stokastik dengan satu proses stokastik dalam menentukan harga opsi beli Eropa.

Kata kunci: Opsi, Opsi Eropa, Dua proses volatilitas stokastik.

Abstract

Option is a derivative securities which is traded the rights of an assets at a certain price and specified dates. Therefore pricing the option price is not an easy matter. Black & scholes models is often to use for pricing European option. Pricing European option price with Black & scholes models it is inadequate to count the option price when in out-of-the money condition. In a while pricing European option price under two stochastic volatility offers more consistent option price. Subtitude the two stochastic volatility processes to the Black & scholes differential equation. The test result perform that two stochastic volatility processes is better than one stochastic volatility processes. Result MSE for two stochastic volatility processes is 0,4478 but MSE for one stochastic volatility processes is 0,4726 that's shows us that the difference in pricing European option between these models is not significant yet.

Keywords*: Option, European option, Two stochastic volatility.*

1. Pendahuluan

Beragamnya jenis investasi di bursa saham menunjukkan bahwa semakin meningkatnya jumlah investor yang ingin berinvestasi. Tidak hanya dapat berinvestasi pada berbagai macam emiten, para investor pun dapat berinvestasi pada suatu emiten derivatif. Emiten derivatif adalah suatu emiten yang sebagian nilainya dipengaruhi oleh emiten lain. Salah satu contoh emiten derivatif yang paling banyak diperdagangkan adalah Opsi.

Opsi merupakan suatu emiten derivatif yang memperjualbelikan hak atas suatu aset. Opsi memiliki dua tipe, yaitu opsi jual (*put)* dan opsi beli (*call).* Opsi *put* adalah pemilik opsi (*writer)* memberikan hak untuk menjual suatu aset pada pembeli opsi (*holder)* pada selang waktu tertentu dan dengan harga tertentu. Sedangkan opsi *call* adalah *writer* memberikan hak untuk membeli suatu aset pada *holder* selama waktu tertentu dan dengan harga tertentu.

Selain itu, opsi mempunyai waktu jatuh tempo, yaitu batas waktu berlakunya opsi, dimana opsi tidak berguna dan tidak dapat dieksekusi lagi setelah melewati batas waktu tersebut.Berdasarkan waktu eksekusi, opsi dapat dibedakan menjadi dua, yaitu opsi Eropa yang hanya bisa di eksekusi pada saat jatuh tempo dan opsi Amerika yang dapat di eksekusi sebelum atau pada saat jatuh tempo.

Dalam menentukan nilai pasar opsi merupakan hal yang tidak mudah karena banyak faktor yang mempengaruhi nilai pasar opsi. Salah satu model yang terkenal untuk menghitung nilai pasar opsi tipe Eropa adalah model Black & scholes. Model Black & scholes adalah model penilaian harga opsi yang banyak digunakan di dunia finansial.

Black and Scholes [1] berasumsi bahwa volatilitas *return* aset pokok adalah konstan dan terdistribusi normal. Telah diketahui bahwa teknik menentukan harga opsi dengan menggunakan *Black and Scholes* [1] masih memiliki kekurangan, bahwa distribusi normal tidak dapat mengatasi *skewness* seperti yang telah di observasi pada data finansial yang *real* [5].

Christoffersen [3] menunjukkan secara empiris bahwa model dengan dua faktor memberikan fleksibilitas dalam membatasi *level* dan *slope* dari *smirk* volatilitas. Model volatilitas stokastik dengan beberapa faktor lebih konsisten dalam menentukan harga opsi dibandingkan dengan model dengan satu faktor saja [4].

2. Landasan Teori

2.1 Opsi

Opsi adalah suatu perjanjian atau kontrak antara penjual opsi (*writer)* dengan pembeli opsi (*holder)*, *writer* menjamin adanya hak dari *holder* untuk membeli atau menjual saham tertentu pada waktu dan harga yang telah ditetapkan. Ada lima variabel yang berpengaruh dalam menentukan harga opsi.

1. Harga aset pokok (S).
2. Harga kesepakatan (K).
3. Waktu jatuh tempo (T).
4. Tingkat suku bunga bebas risiko (r).
5. Volatilitas return harga aset (v).

2.2 Opsi beli

Opsi beli memberikan hak untuk membeli suatu saham dengan harga tertentu pada waktu tertentu. Berdasarkan pengertian dari opsi beli, *payoff* opsi beli merupakan selisih antara harga aset dengan harga kesepakatan (*strike price)*. Bentuk persamaan matematis nilai opsi beli pada saat dieksekusi (*exercise)* dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$C = \max\{S - K, 0\}. \tag{2.1}$$

Persamaan diatas menunjukkan opsi beli tidak memiliki *payoff* jika harga kesepakatan lebih besar daripada harga aset. Jika harga aset lebih besar dari harga kesepakatan maka *payoff* opsi beli merupakan selisih dari harga aset dengan harga kesepakatan.

2.3 Volatilitas

Volatilitas merupakan sebuah variabel yang menggambarkan ukuran dari risiko ketika menentukan harga opsi. Volatilitas ini mempunyai korelasi yang positif dengan harga opsi. Bila volatilitas mengalami kenaikan, maka harga opsi juga akan mengalami kenaikan. Akibatnya, bagaimana menentukan volatilitas ini sangat penting agar harga opsi yang diestimasi lebih tepat dan wajar. Volatilitas ini sering kali dipergunakan untuk melihat naik turunnya harga saham. Bila volatilitas yang tinggi maka investor memperoleh risiko yang besar pula atas investasinya tersebut, oleh karena itu harga opsi juga akan tinggi karena menjamin harga pasti yang diberikan opsi ketika aset tersebut memiliki risiko fluktuasi yang besar.

Dalam statistika, volatilitas dari perubahan harga saham dapat ditaksir dengan nilai standar deviasi dari suatu data historis. Dari suatu data historis dapat diestimasi fluktuasi perubahan harga yang akan terjadi pada saat ini. Dengan mengetahui nilai dari standar deviasi maka dapat ditentukan perubahan dari suatu data tersebut secara pasti. Standar deviasi suatu data dapat dituliskan dengan,

$$v = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2} \tag{2.3}$$

dimana,

v : nilai volatilitas yang ditaksir dengan standar deviasi.
n : jumlah data historis
X_i: nilai return aset
$\bar{X}$: nilai rata – rata (mean) return aset.

2.4 Model perubahan harga saham

Harga saham dilambangkan dengan *S* dan waktu dilambangkan dengan *t.* Perubahan harga saham dinyatakan dengan dS pada interval waktu *dt*. Model umum *return* dari saham dinyatakan dengan dS yang terdiri atas dua bagian. Bagian pertama adalah bagian deterministik yang dilambangkan dengan μdt.

Ukuran dari rata-rata pertumbuhan harga saham atau yang lebih dikenal dengan *drift* ditunjukkan sebagai μ. Sedangkan bagian kedua merupakan model perubahan harga saham secara random yang disebabkan oleh faktor eksternal. Faktor eksternal dilambangkan dengan vdZ. Nilai v didefinisikan sebagai volatilitas saham yang digunakan untuk mengukur standar deviasi dari *return* dan dapat dinyatakan sebagai fungsi dari *S* dan *t*. dZ merupakan suatu proses *Wiener* yang terdistribusi normal. Nilai μ dan v dapat diestimasi menggunakan harga saham pada hari sebelumnya. Model harga saham yang dipengaruhi oleh nilai μ dan v dengan masing-masing bergantung pada *S* dan *t* dirumuskan sebagai berikut :

$$dS = \mu S dt + vSdZ, \tag{2.5}$$

Oleh karena penelitian ini membatasi bahwa return dari saham adalah *risk neutral valuation* maka dalam persamaan (2.5) ekspektasi *return* μ akan sama dengan suku bunga bebas risiko *r*. Sehinga dapat ditulis persamaan perubahan harga saham menjadi,

$$dS = rSdt + vSdZ, \tag{2.6}$$

Untuk pembayaran dividen diasumsikan dibayar oleh perusahaan secara kontinu diberikan sebesar *q*, maka model perubahan harga saham dapat ditulis sebagai berikut :

$$dS = rSdt - qSdt + vSdZ, \tag{2.7}$$

2.5 Persamaan diferensial model black & scholes

Model Black & scholes merupakan model

untuk menentukan harga opsi yang telah banyak digunakan. Model ini dikembangkan oleh *Fischer Black & Myron Scholes*. Model ini hanya dapat digunakan pada penentuan harga opsi tipe Eropa, yang dapat dieksekusi hanya pada waktu *expiration date* saja, sedangkan model ini tidak berlaku untuk opsi tipe Amerika, karena *American option* dapat dieksekusi setiap saat sampai waktu *expiration date.*

Model Black-Scholes menggunakan beberapa asumsi, yaitu opsi yang digunakan adalah opsi tipe Eropa, suku bunga dan variansi harga saham bersifat konstan selama dalam masa *expiration date*, return saham terdistribusi normal, *risk neutral valuation*, saham yang digunakan tidak memberikan dividen, dan tidak terdapat pajak dan biaya transaksi. Dengan mengikuti asumsi ini maka nilai harga opsi hanya akan bergantung pada harga saham, waktu, dan variabel yang sudah ditetapkan konstan.

Dari persamaan model perubahan harga saham yaitu pada persamaan (2.5) dengan persamaan lemma Ito maka didapat persamaan sebagai berikut :

$$dV = vS\frac{\partial v}{\partial s}dZ + \left(\mu S\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{2}v^2S^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial v}{\partial t}\right)dt \quad (2.9)$$

V merupakan nilai opsi yang bergantung pada aset pokok *S* dan waktu *t.* Selanjutnya, untuk menentukan harga opsi dan pergerakan harga saham yang mengikuti *random walk* maka untuk mengurangi risiko dibentuk portofolio Π yang terdiri dari beli opsi V dan jual saham sebanyak Δ lembar, nilai portofolio Π tersebut pada saat *t* adalah :

$$\Pi_t = V_t - \Delta S_t$$

Setelah satu interval waktu dt, maka nilai portofolio tersebut menjadi

$$d\Pi_t = dV_t - \Delta dS_t \quad (2.10)$$

Berdasarkan persamaan diatas Δ dianggap konstan. Kemudian disubtitusikan persamaan (2.5), (2.9) dan (2.10) maka didapat :

$$d\Pi = vS\left(\frac{\partial v}{\partial s} - \Delta\right)dZ + \left(\mu S\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{2}v^2S^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial v}{\partial t} - \mu\Delta S\right)dt \quad (2.11)$$

Kemudian pada persamaan (2.11) dipilih $\Delta = \frac{\partial v}{\partial s}$ yang bertujuan untuk mengurangi variabel stokastik [7] sehingga persamaan menjadi :

$$d\Pi\, dt = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2S^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)dt \quad (2.12)$$

Persamaan (2.12) sudah bebas dari *random walk* maka persamaan tersebut sudah bersifat deterministik. Digunakan batasan *risk neutral valuation* pada persamaan (2.12) sehingga diperoleh sebagai berikut :

$$rd\Pi dt = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2S^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)dt \quad (2.13)$$

Kemudian dengan menyubtitusikan persamaan (2.10) kedalam persamaan (2.13) maka akan didapat persamaan diferensial *Black & Shcoles* [1] :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2S^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + rS\frac{\partial v}{\partial s} - rV = 0 \quad (2.14)$$

2.6 Model dua proses volatilitas stokastik

Untuk melakukan pendekatan *volatility smirk* yang paling baik adalah dengan model dua proses volatilitas stokastik. Model volatilitas stokastik membolehkan korelasi negatif antara *return* saham dan variansinya [3]. Korelasi negatif inilah yang dapat menjelaskan fakta bahwa penurunan harga saham berhubungan dengan kenaikan volatilitasnya.

Telah dibuktikan secara empiris bahwa model dua proses volatilitas stokastik memiliki hasil yang lebih baik dibandingkan dengan satu proses saja[5]. Model ini lebih fleksibel untuk mengatasi level dan *slope* dari volatilitas *smirk.* Serta model dua proses volatilitas stokastik memberikan harga yang lebih konsisten dibandingkan model dengan satu proses saja [5].

Dengan mengikuti model volatilitas stokastik tipe Heston [2] maka model dua proses volatilitas stokastik diformulasikan sebagai berikut

$$dS = \mu Sdt + \sqrt{v_1}\,SdZ_1 + \sqrt{v_2}\,SdZ_2, \quad (2.16)$$

$$dv_1 = k_1(\theta_1 - v_1)dt + \rho_{13}\sigma_1\sqrt{v_1}\,dZ_1 + \sqrt{1-\rho_{13}^2}\,\sigma_1\sqrt{v_1}\,dZ_3, \quad (2.17)$$

$$dv_2 = k_2(\theta_2 - v_2)dt + \rho_{24}\sigma_2\sqrt{v_2}\,dZ_2 + \sqrt{1-\rho_{24}^2}\,\sigma_2\sqrt{v_2}\,dZ_4. \quad (2.18)$$

dimana θ_1 dan θ_2 masing-masing merupakan *long-run* mean dari v_1 dan v_2 , k_1 dan k_2 adalah kecepatan *mean reversion*, dan σ_1 , σ_2 adalah volatilitas dari $v_1 dan\ v_1$. Dan Z_j, untuk j=1,..,4 adalah proses *wiener* yang independen. Dengan ρ_{13} merupakan korelasi *dS* dengan dv_1, dan ρ_{24} merupakan korelasi antara *dS* dengan dv_2 sedangkan korelasi dv_1 dengan dv_2 adalah nol.

Nilai opsi pada saat t, sebagai V(t,s,v_1, v_2) dimana S adalah harga aset pokok yang membayar *dividend* sebesar q dalam pasar yang diasumsikan bebas risiko r, dan v_1, v_2 adalah dua proses variansi S dengan mengikuti *risk neutral valuation* dinyatakan dalam persamaan berikut :

$$dS = (r - q)Sdt + \sqrt{v_1}\,Sd\tilde{Z}_1 + \sqrt{v_2}\,Sd\tilde{Z}_2, \quad (2.21)$$

$$dv_1 = [k_1\theta_1 - (k_1 + \gamma_1)v_1]dt + \rho_{13}\sigma_1\sqrt{v_1}\,d\tilde{Z}_1 + \sqrt{1-\rho_{13}^2}\,\sigma_1\sqrt{v_1}\,d\tilde{Z}_3$$

$$dv_2 = [k_2\theta_2 - (k_2 + \gamma_2)v_2]dt + \rho_{24}\sigma_2\sqrt{v_2}\,d\tilde{Z}_2 + \sqrt{1-\rho_{24}^2}\,\sigma_2\sqrt{v_2}\,d\tilde{Z}_4$$

2.7 Persamaan Black & Scholes dengan dua proses volatilitas stokastik.

Maka dengan menyubtitusikan model perubahan harga saham yang dipengaruhi oleh dua proses volatilitas stokastik (2.21) kedalam persamaan diferensial Black & scholes untuk opsi beli eropa, sebagai berikut :

Untuk persamaan diferensial *Black & Shcoles* yang menggunakan dividen sebesar *q*, maka persamaan (2.14) dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}(\tau, S, v_1, v_2) = \mathcal{L}V(\tau, S, v_1, v_2) - rV, \quad (2.23)$$

Dimana $\mathcal{L}$ adalah operator *Dynkin* yang menggabungkan persamaan diferensial Black & scholes dengan persamaan (2.21), sehingga menjadi:

$$\mathcal{L} = (r-q)S\frac{\partial}{\partial s} + [k_1(\theta_1 - v_{1)} - \gamma_1 v_1]\frac{\partial}{\partial v_1} + [k_2(\theta_2 - v_{2)} - \gamma_2 v_2]\frac{\partial}{\partial v_2} + \frac{1}{2}v_1 S^2\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 v_1\frac{\partial^2}{\partial v_1^2} + \frac{1}{2}v_2 S^2\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 v_2\frac{\partial^2}{\partial v_2^2} + \rho_{13}\sigma_1 v_1 S\frac{\partial^2}{\partial s\partial v_1} + \rho_{24}\sigma_2 v_2 S\frac{\partial^2}{\partial s\partial v_2} \quad (2.24)$$

dengan batasan :

$$V(0,S,v_1,v_2) = (S-K), \quad 0 < S < \infty, \quad (2.25)$$

$$V(\tau,0,v_1,v_2) = 0, \tau \geq 0 \quad (2.26)$$

Didefinisikan kondisi dari variabel pada *domain* berikut $0 < v_1, v_2 < \infty$. Pada (2.25) merupakan syarat awal bahwa nilai harga opsi pada saat jatuh tempo dan pada (2.26) merupakan syarat batas pada saat opsi dieksekusi.

Kemudian untuk mendapatkan solusi eksak dari persamaan diferensial tersebut (2.21) digunakan transformasi *Fourier* dan *Laplace* [5] sehingga didapat persamaan untuk menentukan harga opsi beli Eropa $V_E(\tau,S,v_1,v_2)$ sebagai berikut:

$$V_E(\tau,S,v_1,v_2) = e^{-q\tau}SP_1(\tau,S,v_1,v_2;K) - e^{-r\tau}KP_2(\tau,S,v_1,v_2;K), \quad (2.27)$$

dimana

$$P_j(\tau,S,v_1,v_2;K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Re\left(\frac{g_j(\tau,S,v_1,v_2;\eta)\,e^{-i\eta\ln K}}{i\eta}\right)d\eta \quad (2.28)$$

Untuk j = 1,2 berikut

$$g_j(\tau,S,v_1,v_2;\eta) = \exp\{i\eta\, lnS + B_j(\tau,\eta) + D_{1j}(\tau,\eta)v1 + D_{2j}(\tau,\eta)v2\}, \quad (2.29)$$

$$B_j(\tau,\eta) = i\eta(r-q)\tau + \frac{\Phi_1}{\sigma_1^2}\left\{(\Theta_{1j} + \Omega_{1j})\tau - 2\ln\left(\frac{1-Q_{1j}e^{\Omega_{1j}\tau}}{1-Q_{1j}}\right)\right\} + \frac{\Phi_2}{\sigma_2^2}\left\{(\Theta_{2j} + \Omega_{2j})\tau - 2\ln\left(\frac{1-Q_{2j}e^{\Omega_{2j}\tau}}{1-Q_{2j}}\right)\right\}, \quad (2.30)$$

$$D_{1j}(\tau,\eta) = \frac{(\Theta_{1j}+\Omega_{1j})}{\sigma_1^2}\left[\frac{1-e^{\Omega_{1j}\tau}}{1-Q_{1j}e^{\Omega_{1j}\tau}}\right], \quad (2.31)$$

$$D_{2j}(\tau,\eta) = \frac{(\Theta_{2j}+\Omega_{2j})}{\sigma_2^2}\left[\frac{1-e^{\Omega_{2j}\tau}}{1-Q_{2j}e^{\Omega_{2j}\tau}}\right], \quad (2.32)$$

dengan, $Q_{mj} = ((\Theta_{mj} + \Omega_{mj})$, untuk m = 1,2 dan j = 1,2 dimana

$\Theta_{1,1} = \Theta_1(i-\eta),\ \Theta_{1,2} = \Theta_1(-\eta), \Theta_{2,1} = \Theta_2(i-\eta), \Theta_{2,2} = \Theta_2(-\eta), \Omega_{11} = \Omega_1(i-\eta), \Omega_{11} = \Omega_1(i-\eta), \Omega_{11} = \Omega_1(i-\eta), \Omega_{11} = \Omega_1(i-\eta)$

dimana,

$\Theta_1 = \beta_1 + i\eta\rho_{13}\sigma_1, \Theta_2 = \beta_2 + i\eta\rho_{24}\sigma_2,\ \Lambda(\eta) = i\eta - \eta^2, \Phi_i = k_i\theta_i,\ \beta_i = k_i + \gamma_i$,

untuk i = 1,2.

Pada persamaan (2.27) merupakan solusi eksak untuk menentukan harga opsi beli Eropa dengan dua proses volatilitas stokastik. Untuk menyelesaikan persamaan tersebut terlebih dahulu diselesaikan persamaan (2.28). Maka untuk integral tak wajar pada persamaan (2.28) akan diselesaikan dengan metode numerik yaitu, kuadratur Gauss – Legendre [5].

2.8 Gauss – Legendre kuadratur

Kuadratur Gauss digunakan untuk mengaproksimasi sebuah fungsi integral, $f(x)$, pada [a,b] sebagai berikut :

$$\int_a^b f(x)dx \approx c1f(x1) + c2f(x2) + \cdots + cnf(xn), \quad (2.33)$$

Kemudian selang integral [a,b] ditransformasikan kedalam selang [-1,1] sehingga integral tersebut menjadi sebagai berikut :

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(t_i)$$

dengan menggunakan transformasi variabel sederhana, maka untuk mengubah $x \in [a,b]$ kedalam $t \in [-1,1]$. Dapat dilakukan dengan transformasi sebagai berikut

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{t+1}{1-(-1)}, \rightarrow \frac{x-a}{b-a} = \frac{t+1}{2}, \rightarrow x = \frac{(t+1)(b-a)}{2} + a$$

sehingga

$$x = \frac{(b-a)}{2}t + \frac{(b+a)}{2}$$

dimana $x = ht + c$, dengan $h = (b-a)/2$ dan $c = (b+a)/2$. Sehingga dapat ditulis

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)\frac{b-a}{2}dt \quad (2.34)$$

Maka secara umum fungsi Gauss Legendre kuadratur dapat ditulis

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i), \quad (2.35)$$

dengan $w_i = \frac{2}{(1-x^2)[M_n'(x_i)]^2}$ (2.36)

$$x_i \approx \cos\left(\frac{(4h-1)\pi}{(4n+2}\right) \quad (2.37)$$

Disebut kuadratur Gauss-Legendre karena untuk menentukan nilai node dan bobotnya digunakan polinomial Legendre. Berikut adalah fungsi rekurens dari polinomial Legendre

$$M_{i+1} = \frac{(2i+1)}{i+1}xM_i - \frac{i}{i+1}M_{i-1},$$

dengan

$M_0(x) = 1, M_1(x) = x.$

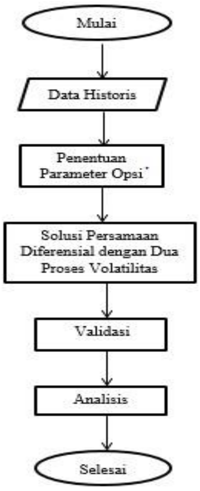
Persamaan (2.36) merupakan fungsi untuk menghitung bobot pada kuadratur Gauss, dimana $M_n'(x_i)$ adalah turunan polinomial Legendre derajat –n pada x_i. Dengan tebakan awal yang di aproksimasi dengan fungsi (2.37), kemudian diikuti dengan iterasi Newton Raphson.

Kemudian setelah persamaan integral pada (2.28) diselesaikan secara numerik dengan kuadratur *Gauss-Legendre*. Maka akan diperoleh nilai opsi beli Eropa dengan dua proses volatilitas stokastik dari persamaan (2.27).

3. Perancangan Sistem

Masukkan dari sistem ini yaitu data opsi beli Eropa yang telah dihitung *return* dari aset pokoknya, volatilitas aset pokok, dividen, dan dengan suku bunga yang mengikuti suku bunga bebas risiko. Keluaran dari sistem ini adalah harga opsi eropa berdasarkan model dua proses volatilitas stokastik. Perancangan sitem ini akan digambarkan oleh *flowchart* dibawah ini:

Gambar 3. 1Flowchart



3.1 Data historis

Pada penentuan harga opsi akan digunakan data harga saham *Microsoft* dan harga opsi yang telah lampau sebagai bahan pengujian pada model dua proses volatilitas stokastik.

3.2 Parameter opsi

Dari data historis yang telah ada kemudian ditentukan beberapa parameter opsi yang akan digunakan pada model dua proses volatilitas stokastik, berikut adalah beberapa parameter opsi:

1. Harga aset pada saat ini (S_0).
2. Harga kesepakatan (K).
3. Waktu jatuh tempo (T).
4. Tingkat suku bunga bebas risiko (r).
5. Dividen (q).

Dalam hal ini harga aset yang digunakan sebagai parameter yaitu harga aset pada saat waktu $t = 0$ *(current asset price).* Sedangkan, untuk nilai volatilitas v mengikuti dua proses stokastik seperti persamaan (2.18).

3.3 Solusi persamaan diferensial dengan dua volatilitas stokastik

Tahap ini akan memberikan harga opsi beli eropa dengan menggunakan persamaan diferensial yang aset pokoknya mengikuti dua proses volatilitas stokastik seperti yang sudah dijelaskan pada persamaan (2.19) dengan menggunakan parameter sebagai berikut :

1. k adalah *mean reversion,* parameter ini mengasumsikan bahwa perubahan nilai aset tidak akan jauh dari rata-rata perubahannya.
2. v adalah proses variansi dari S.
3. θ adalah *long-run mean* dari masing-masing v.
4. r adalah *interest rate* yang menggambarkan bahwa aset pokok adalah *risk neutral valuation.*
5. ρ merupakan korelasi antara dS *dan* dv.
6. γ adalah risiko pasar yang diasosiasikan dengan proses *Wiener.*
7. σ adalah volatilitas dari volatilitas return harga aset.

Penentuan parameter – parameter k, γ, σ, dan θ dilakukan dengan cara coba - coba, sehingga didapat harga opsi dengan dua proses volatilitas stokastik yang mendekati harga pasar atau mendapatkan nilai MSE yang minimal. Dalam menentukan nilai ρ digunakan data historis return saham, kemudian di hitung volatilitas hariannya. Dari persamaan (2.21) maka dapat ditentukan nilai untuk v.

3.4 Validasi

Validasi merupakan tahapan terakhir pada solusi harga opsi beli eropa dengan model dua proses volatilitas stokastik kemudian dibandingkan dengan data harga opsi beli Eropa di pasar yang telah terjadi.

3.5 Analisis

Pada tahapan terakhir ini akan dianalisis hasil harga opsi beli eropa dari solusi persamaan diferensial dengan dua proses volatilitas stokastik apakah lebih representatif dibandingkan dengan satu proses volatilitas stokastik.

4. Pengujian Sistem

4.1 Implementasi penentuan harga opsi beli eropa dengan dua proses volatilitas stokastik.

Pada pengujian ini, data yang digunakan adalah data saham harian dari Microsoft yang diunduh dari *yahoo finance* [8]. Banyaknya data yang digunakan adalah lima puluh dua data yaitu, sejak tanggal 12-September-2014 sampai dengan 24-November-2014. Dari data historis tersebut dihitung volatilitas harga saham dengan dua proses volatilitas stokastik ($v1$ dan $v2$), dan untuk menghitungnya dibutuhkan beberapa parameter lain seperti $k1, k2, \theta1, \theta2, \rho13, \rho24, \sigma1, \sigma2, \gamma1$, dan $\gamma2$.

Dalam menentukan nilai $\rho13$ dan $\rho24$ digunakan data historis return saham, kemudian di hitung volatilitas hariannya. Dari persamaan (2.22) maka dapat ditentukan nilai historis untuk $v1$ dan $v2$. Maka diperoleh nilai untuk $\rho13 = 0.0658$ dan $\rho24 = 0.0658$.

Untuk mengestimasi nilai dari parameter lainnya dilakukan dengan cara coba-coba (*trial and error)* yang dapat meminimalisir MSE dari penentuan harga opsi beli eropa yang dibandingkan dengan harga pasar opsi. Maka diperoleh $k1 = 1$, $k2 = 4$, $\theta1 = 0.06$, $\theta2 = 0.07$, $\sigma1 = 0.1$, $\sigma2 = 0.1$, $\gamma1 = 0$, dan $\gamma2 = 0$.

Harga opsi beli Microsoft pada saat awal pengamatan adalah harga opsi beli pada 26 November 2014. Dengan waktu jatuh tempo opsi tersebut adalah 26 Desember 2014. Sedangkan untuk tingkat suku bunga bebas risiko diambil dari *global-rates* [9] yaitu r = 0.0025 dan untuk dividen diambil dari *yahoo finance* [8] yaitu sebesar q = 0.031.

4.1.1 Pengujian harga opsi beli Eropa pada beberapa T dengan nilai K = 42

K = 42; r = 0,0025; q = 0,031						
T	S(0)	Harga opsi dengan dua proses stokastik	Harga opsi dengan satu proses stokastik	Harga pasar	Selisih dua proses	Selisih satu proses
26/11/2014	47,47	5,3450	5,4799	6,35	1,01003	0,75707
2/12/2014	48,68	6,5799	6,6874	6,35	0,05285	0,11384
8/12/2014	48,42	6,3481	6,4254	6,35	0,00000361	0,00569
15/12/2014	46,95	4,9073	4,9533	6,35	2,08138	1,95077
18/12/2014	45,75	3,7235	3,7424	4,2	0,22705	0,20940
22/12/2014	47,77	5,7245	5,6616	4,9	0,67980	0,58003

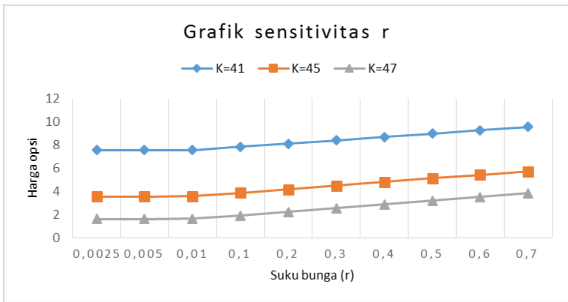
Berdasarkan pengujian dengan nilai K yang sama dan waktu jatuh tempo yang berbeda pada Gambar (4.8) dapat dilihat bahwa harga opsi yang dihasilkan satu proses stokastik dan dua proses stokastik tidak banyak berbeda.

Dari hasil pengujian terlihat bahwa harga opsi yang dihasilkan dengan dua proses stokastik memiliki hasil MSE yang lebih kecil dibandingkan dengan satu proses stokastik. Bahkan pada pengujian tanggal 2 Desember 2014 penentuan harga opsi dengan dua proses stokastik memberikan harga yang lebih mendekati pasar pada setiap K yang digunakan yaitu, 41 sampai 47. Walaupun perbedaan harga opsi yang dihasilkan tidak jauh berbeda, hal inipun dapat dilihat dari besarnya nilai MSE untuk semua pengujian penentuan harga opsi dengan dua proses stokastik yaitu, sebesar 0.4478 sedangkan untuk penentuan harga opsi dengan satu proses stokastik yaitu, sebesar 0.4726.

4.2. Analisis sensitivitas pada penentuan harga opsi dengan dua proses volatilitas stokastik.

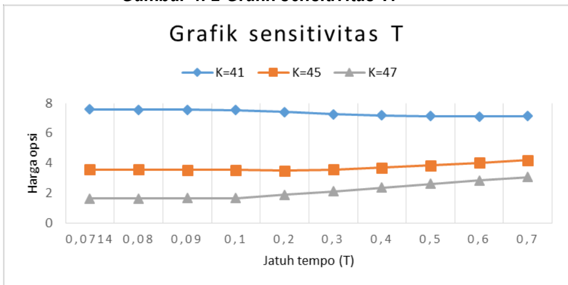
Pada tahap analisis sensitivitas data harga opsi yang digunakan adalah data pada 2 – Desember – 2014, dengan menggunakan S0 = 48.68 ,r = 0.0025 ,q = 0.031 ,T = 18/252 serta beberapa parameter yang telah ditentukan melalui *trial and error* yaitu $k1 = 1, k2 = 4, \theta 1 = 0.06, \theta 2 = 0.07, \rho 13 = 0.0658, \rho 24 = 0.0658, \sigma 1 = 0.1, \sigma 2 = 0.1, \gamma 1 = 0, \gamma 2 = 0.$

Gambar 4. 1Grafik sensitivitas r.



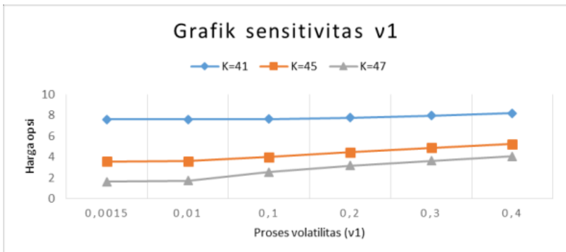
Pada pengujian sensitivitas tingkat suku bunga digunakan tiga harga kesepakatan yaitu, pada saat K = 41, K = 45 dan K = 47. Terlihat bahwa semakin besar tingkat suku bunga, maka semakin besar pula harga opsi yang didapatkan. Hal ini diakibatkan nilai portofolio yang mengikuti suku bunga bebas risiko.

Gambar 4. 2 Grafik sensitivitas T.

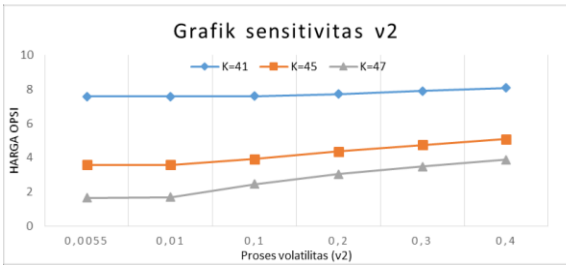


Pada pengujian sensitivitas waktu jatuh tempo terlihat apabila waktu jatuh tempo opsi semakin lama maka harga opsi akan semakin besar, akan tetapi untuk harga kesepakatan yang rentangnya cukup jauh dari harga saham awal berlaku sebaliknya. Karena semakin lama waktu jatuh tempo maka diberikan jaminan harga pasti opsi dalam tempo yang lebih lama.

Gambar 4. 3 Grafik sensitivitas v1.



Gambar 4. 4 Grafik sensitivitas v2.



Dari pengujian sensitivitas ν1 dan ν2 digunakan harga kesepakatan pada saat K = 41, K = 45, dan K = 47. Terlihat bahwa ν1 dan ν2 memiliki pengaruh kenaikan harga opsi, namun pada rentang harga kesepakatan (K) yang jauh dari harga saham awal (S_0) kenaikan harga opsi tidak besar. Maka dengan meningkatnya nilai variansi ν1 dan ν2 akan meningkatkan jaminan harga pasti opsi.

4.3. Analisis implementasi

Berdasarkan implementasi yang dilakukan pada opsi beli *Microsoft*, dilihat dari hasil MSE yang diperoleh, penentuan harga opsi dengan menggunakan dua proses volatilitas stokastik menghasilkan harga opsi yang lebih mendekati harga pasar, walaupun tidak jauh berbeda dengan harga opsi yang dihasilkan dengan satu proses stokastik. Untuk penentuan harga opsi dengan dua proses stokastik dapat menghitung harga opsi pada kondisi *out-of-the-money* sedangkan dengan satu proses stokastik tidak dapat memberikan harga opsi pada kondisi *out-of-the-money*, seperti pada pengujian pada saat S0 = 46,95 dengan K = 47 dan pada saat S0 = 45,74 dengan K = 46 sampai K = 47.

Opsi merupakan suatu emiten derivatif yang harganya dipengaruhi oleh suatu aset lain. Dalam hal ini aset tersebut adalah harga saham, maka besar kecilnya volatilitas harga suatu saham juga mempengaruhi harga dari opsi saham tersebut. Semakin besar volatilitas harga suatu saham maka harga opsi tersebut juga semakin naik karena menjaminan harga pasti yang diberikan opsi sedangkan saham tersebut memiliki risiko fluktuasi yang besar pula.

Hal tersebut dapat dilihat pada pengujian sensitivitas ν1 dan ν2. Dengan meningkatnya nilai dari ν1 dan ν2 dapat mempengaruhi perubahan harga opsi yang ikut meningkat juga. Demikian pula dengan beberapa parameter lain seperti suku bunga (r) dan waktu jatuh tempo (T) yang cukup mempengaruhi kenaikan harga opsi.

5. Kesimpulan & Saran

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pengujian yang dilakukan pada penentuan harga opsi beli eropa dengan dua proses stokastik maupun satu proses stokastik, maka dapat disimpulkan bahwa hasil pengujian dengan menggunakan model dua proses stokastik dalam menentukan harga opsi beli Eropa pada aset saham *Microsoft* memiliki nilai MSE yang lebih kecil, yaitu 0.4478 dibandingkan model satu proses stokastik, yaitu 0.4726 dalam menentukan harga pasar opsi beli Eropa. Namun hal tersebut masih belum jauh berbeda. Model satu proses volatilitas stokastik, nilai volatilitasnya bersifat konstan, sedangkan model dua volatilitas stokastik menghasilkan nilai volatilitas yang berubah – ubah setiap waktu (*dv*).

Pada pengujian sentitivitas parameter *r*, T, k1, k2, θ1, θ2, ρ1, ρ2, σ1, σ2, γ1 dan γ2 dapat dilihat bahwa tidak semua parameter memiliki pengaruh yang signifikan terhadap harga opsi. Hanya beberapa parameter seperti tingkat suku bunga (r), waktu jatuh tempo (T), dan proses perubahan variansi (ν1 dan ν2) yang mempengaruhi perubahan nilai opsi.

5.2 Saran

1. Pada penelitian ini dalam mengestimasi beberapa parameter hanya menggunakan teknik coba-coba seperti pada penentuan k1, k2, θ1, θ2, σ1, σ2, γ1 dan γ2. Diharapkan untuk penelitian selanjutnya untuk estimasi parameter tersebut dilakukan berdasarkan data historis yang ada.

2. Pada penelitian selanjutnya, sebaiknya data opsi yang diamati memiliki waktu jatuh tempo yang lebih lama dan dicoba pengaruh suku bunga tidak bebas risiko.

Daftar Pustaka

[1] F. Black, M. Scholes. (2008). The Pricing of Corporate liabilities. J. Political econ.

[2] S. Heston. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options.

[3] P. Christoffersen, S. Heston, K. Jacobs. (2009). The shape and term of the index option smirk: Why multifactor stochastic volatility model work so well.

[4] J. da Fonseca, M. Graselli, C. Tebaldi. (2008). A multifactor volatility Heston model. Quantum Finance.

[5] C. Chiarella, J. Ziveyi. (2013). American option under two stochastic volatility processes. Applied Mathematic and Computation.

[6] Ruey, S. T. (2002). Analysis of Financial Time Series. John Wiley and Sons. P. Wilmott.

[7] Yahoo Finance. (2015, Maret 03). Diambil kembali dari http://finance.yahoo.com/q/hp?s=MSFT&a=08&b=12&c=2014&d=10&e=24&f=2014&g=d

[8] Global Rates. (2014, November 13). Diambil kembali dari http://global-rates.com/.

[9] M.Nimalin. (2005). A Practical Approach with Matlab Code.